Consumidores cautivos y Colusión: Descifrando el Paradigma Informacional

Felipe Cerda P.*

Resumen

En este trabajo se busca estudiar cómo varían las posibilidades de sostener colusión entre dos firmas que compiten en precios cuando se enfrentan por una masa de consumidores heterogéneos los cuales se diferencian por su nivel de información sobre el mercado, es decir, si conocen completa o parcialmente el vector de precios de la economía. Se caracteriza inicialmente el juego de etapa donde se encuentra que no existen equilibrios de Nash simétricos en estrategias puras, por tanto, las firmas escogen sus estrategias de mejor respuesta a partir de una función de distribución de probabilidad que describe el equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego, provocando así la existencia de dispersión de precios. Luego, a partir de los resultados anteriores, se ejecuta un esquema de interacción repetida en el cual se busca encontrar el factor de descuento crítico que permita sostener la colusión y que satisfaga a la vez el concepto de equilibrio llamado equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Para esto se implementan dos tipos de estrategias: estrategias del tipo *Grim Trigger* y estrategias del tipo *Optimal Penal Code*. Se muestra inicialmente que bajo un esquema de estrategias del tipo *Grim Trigger* no existen diferencias en comparación al modelo clásico de competencia *à la Bertrand*, esto es, el nivel de información de los consumidores no sería relevante. Posteriormente bajo un esquema de estrategias del tipo *Optimal Penal Code* se encuentra que el factor de descuento crítico que permite sostener el comportamiento colusivo está en directa relación con el nivel informacional presente en el mercado.

Palabras Claves: Colusión, Competencia en precios, Consumidores cautivos, Equilibrio de Nash en estrategias mixtas, Dispersión de precios, Superjuegos, Estrategias Grim Trigger, Estrategias Optimal Penal Code, Factor de descuento crítico

Clasificación JEL: C72, C73, D43, L13

*Magíster en Economía - ILADES\Georgetown University. felipe.cerda.p@gmail.com

1. Introducción

Esclarecer el rol que juega la información en la economía ha sido inspiración durante décadas para economistas, matemáticos y cientistas sociales. No existe, de común acuerdo, una convención acerca de que nivel informativo es deseable o necesario para que la economía logre alcanzar el óptimo social dadas las interacciones en el mercado. Hoy en día nos vemos confrontados a una especie de paradigma informacional que surge básicamente del *vox populi* el cual no demuestra base científica alguna para su defensa. Esto ha llevado a diversos investigadores a preguntarse: ¿Qué llamamos hoy información en economía? para luego contrapreguntarse ¿Es relevante esta información? y más aún ¿Qué rol juega esta información en las interacciones de mercado? Así, una de las variables más relevantes que los economistas han logrado evidenciar y que posee un rol informativo de gran magnitud es el precio de un bien o servicio (o mejor dicho, simplemente la variable precio) y cómo esta variable incide en las interacciones de la economía propiamente tal. Uno de los precursores en intentar entender el rol informativo de los precios fue Stigler (1961) el cual en su trabajo denominado "The Economics of Information" intenta explicar el surgimiento de un fenómeno económico que es denominado *dispersión de precios*. Parte de su explicación proviene de plantear una hipótesis que resulta fundamental para comprender el comportamiento del mercado y la economía moderna: la dispersión surge por la existencia de costos asociados a los consumidores al intentar obtener información respecto a la totalidad de precios presentes en el mercado. Este problema básico pero fundamental en economía abrió un campo extremadamente fértil para la investigación y el entendimiento sobre el rol que juega la información (en este caso, la información respecto a los precios) en la economía. Stigler en su investigación expone datos referentes a la dispersión de precios en algunas industrias y desarrolla un mecanismo de búsqueda óptima para los consumidores. En este articulo si bien la concepción del entendimiento del rol informativo es clave, carece completamente de un punto de vista de interacciones estratégicas, es decir, no presta atención a la dinámica entre las firmas.

Un segundo punto de vista lo entrega Varian (1980) en su trabajo "A Model of Sales" agregando un elemento adicional clave en el entendimiento del rol de la información y su incidencia en la formación de precios. Este elemento adicional es inicialmente planteado por Salop y Stiglitz (1977) en la investigación titulada "Bargains and Ripoffs: A Model of Monopolistically Competitive Price Dispersion" pero es Varian quien lo utiliza para desarrollar la idea de dispersión temporal de precios a partir de un cambio en la estructura de los consumidores; este plantea la existencia de dos tipos de consumidores, es decir, los consumidores dejan de ser un grupo atomizado homogéneo y se transforma en un conjunto de individuos con diversas características, que en este caso, trata sobre una diferencia en el nivel de información que poseen los consumidores respecto a los precios presentes en la economía. Este cambio, que parece algo natural en la estructura de demanda de cualquier mercado, es completamente innovador y agrega elementos al análisis antes omitidos. En su trabajo, Varian encuentra estrategias de precios óptimas para las firmas que enfrentan una masa heterogénea de consumidores respecto a su nivel de información sobre los precios presentes en la economía (dada exógenamente), estas estrategias vienen dadas por una función de distribución acumulada que define el equilibrio del modelo.

Finalmente Baye et al. (1992) en su trabajo denominado "It Takes Two to Tango: Equilibria in a Model of Sales" toma el marco teórico del modelo planteado por Varian y fijando un número de firmas mayor que dos, estudia los tipos de equilibrios existentes bajo esta modelación, encontrando, por una parte, un equilibrio simétrico y, por otra parte, un continuo de equilibrios asimétricos (dependiendo de forma directa del número de firmas presentes en el mercado) los cuales se ordenan bajo un criterio de dominancia estocástica de primer orden. Así, entonces, la finalidad de este trabajo es aportar al entendimiento del valor que posee la información en un mercado y cómo esta podría eventualmente afectar las condiciones para desarrollar prácticas anticompetitivas, es decir, se busca entender bajo un esquema de heterogeneidad informacional por parte de los consumidores presentes en un mercado determinado, cómo esta diferencia informacional incide en la competencia de un duopolio que compite *à la Bertrand*. Particularmente, se pretende determinar si esta estructura informacional, que afecta a la demanda, propicia o no prácticas anticompetitivas como la colusión tácita. Para esto, tomamos los fundamentos teóricos de lo aquí expuesto a partir de las investigaciones de Varian y Baye et al., para construir un modelo que servirá como elemento inicial en el estudio de la interacción estratégica y la dinámica intertemporal de las firmas. Así, una conjetura inicial para dar pie a esta investigación será intentar responder si poseer una modelación con estas características (consumidores cautivos: i.e. desinformados y, por tanto, asignan su demanda al precio que conocen, el cual no es necesariamente el menor) beneficia a los consumidores que son libres (informados y, por tanto, asignan su demanda al menor precio), es decir, en términos dinámicos: sostener un acuerdo colusivo sería más complejo para las firmas y, por ende, se propiciaría la competencia. Entonces, a partir de este esquema: ¿Será eficaz, en el sentido de política, disminuir los costos de búsqueda[1]?, ¿Será entonces, beneficioso para la economía la existencia de consumidores cautivos desde un punto de vista dinámico?

Así, para responder estás preguntas, se desarrolla un modelo con las características antes expuestas teniendo por finalidad desarrollar un esquema dinámico que permita estudiar cómo incide la información sobre los precios de mercado en la propensión a establecer acuerdos colusivos. Para esto, luego de esta introducción, se continúa con la sección 2. en la cual se desarrolla el modelo base que nos permitirá implementar el estudio dinámico de este esquema: se construye lo que en la literatura de teoría de juegos se conoce como el juego de etapa y se establece el concepto de solución para este juego lo cual entregará un primer resultado; crucial para el desarrollo de la investigación. En la sección 3. se ejecuta la interacción repetida, es decir, el superjuego para entender cómo esta estructura informacional repercute en la interacción dinámica de las firmas. En esta sección se ejecutan dos esquemas de estudio, esto es, se analiza la interacción repetida pero con distintas estrategias de cooperación analizando el factor de descuento crítico que permite sostener el acuerdo colusivo. Finalmente en la sección 4. se presentan las conclusiones y sugerencias.

2. Modelo

Siguiendo a Varian (1980) y a Baye et al (1992) se presenta un modelo simple de dos firmas que compiten en precios por la venta de un bien homogéneo donde existe una masa de consumidores los cuales serán clasificados según su grado de información (i.e. si conocen completa o parcialmente el vector de precios de la economía). Las firmas tendrán una demanda cautiva representada por un cierto porcentaje de la masa de consumidores que desconoce el vector de precios de la economía; siempre que éstas no fijen un precio excesivamente alto, es decir, que no exceda la valoración del consumidor

[1] Es decir, disminuir la heterogeneidad informacional

por el bien (que es idéntica para todos). Por otra parte, el porcentaje de la masa de consumidores que conoce integramente el vector de precios de la economía asignará su consumo a la firma que fija el precio menor. Así, se esquematizará el modelo como sigue con el fin de caracterizar el juego de etapa en su forma normal, es decir, $G = \left\{N, (S_i)_{i\in N}, (\pi_i)_{i\in N}\right\}$.

Se considera un mercado con $N = 2$ firmas: $\{i, j\}^2$, las cuales producen un bien homogéneo. Se asumirá que no existe libre entrada de firmas, por tanto N es fijo. La función de costos de cada firma viene dada por la función $C_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tomando la siguiente forma $C_i(q_i) = cq_i$, $\forall i, j$, donde q_i representa la cantidad producida por cada firma y c será igual al costo medio e igual al costo marginal de cada firma[3], esto es: $c = CMe := {}^{cq_i}/_{q_i} = CMg := {}^{\partial c_i(q_i)}/_{\partial q_i}$. La masa de consumidores es suficientemente grande[4] y cada uno de estos posee una valoración r por el bien. Así, podemos establecer que existirá consumo de una unidad del bien si y sólo si $p_i \leq r$ y no existirá consumo si $p_i > r$, $\forall i, j$ con $\mathbf{p} \geq 0$, donde $\mathbf{p} := (p_i, p_j)$, es decir, el vector de precios de la economía. Luego, los consumidores se clasifican según su grado de información respecto a los precios presentes en el mercado, esto es, existen dos tipos de consumidores: $I \in (0, 1)$, que representa la proporción de *consumidores informados* (conocen $\mathbf{p}$, por tanto compran a la firma que fija el precio más bajo) y $U \in (0, 1)$, que representa la proporción de *consumidores desinformados* (conocen parcialmente $\mathbf{p}$; es decir, conocen el precio fijado por una única firma, y comprarán sólo si ese precio es menor o igual a r). Entonces la masa de consumidores $M := I + U = 1$. Asumiremos la misma proporción de U para cada firma y además $r\left(\frac{U}{2}\right) - c\left(\frac{U}{2}\right) > 0$ (es decir, debe existir incentivo por servir a los consumidores desinformados).

En el juego G, las firmas fijan precios de forma simultánea. La función de beneficios de la firma i[5], $\pi_i : [0, {}^+\infty) \times [0, {}^+\infty) \to \mathbb{R}$, está determinada de la siguiente forma:

$$\pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} p_i\left(I + \frac{U}{2}\right) - c\left(I + \frac{U}{2}\right) & \text{si} \quad p_i < p_j \wedge p_i \leq r \\ p_i\left(\frac{I+U}{2}\right) - c\left(\frac{I+U}{2}\right) & \text{si} \quad p_i = p_j \leq r \\ p_i\left(\frac{U}{2}\right) - c\left(\frac{U}{2}\right) & \text{si} \quad p_j < p_i \leq r \\ 0 & \text{si} \quad p_i > r \end{cases} \tag{1}$$

Así, si la firma i fija un precio menor que su rival j, y no mayor que la valoración de los consumidores, esta se lleva a toda la proporción de consumidores informados y su proporción correspondiente de consumidores desinformados. Si ambas firmas cobran el mismo precio y este a su vez no es mayor que la valoración de los consumidores, se reparten completamente la masa de consumidores sirviendo a su proporción de consumidores desinformados más la proporción de consumidores informados asignados simétricamente dada la igualdad de precios establecido por las firmas. Si la firma i fija un precio no mayor que la valoración de los consumidores pero mayor que el precio de su rival, esta sólo sirve a su proporción de consumidores desinformados. Finalmente no existirá demanda si el precio cobrado por alguna firma excede la valoración que poseen los consumidores.

Una vez determinados los componentes del modelo, se caracterizará inicialmente el juego de etapa G, donde el enfoque será dilucidar equilibrios simétricos. En primera instancia se mostrará que no

[2] Con $i \neq j$.

[3] Por simplicidad, nos restringiremos a contextos simétricos donde $C_i(\cdot) = C(\cdot)$ para i, j. Luego, la función de beneficios π_i es invariante ante cualquier cambio en los índices de las firmas.

[4] Es decir, $\#$Consumidores$\to {}^+\infty$.

[5] Para la función de beneficios de la firma j, basta simplemente con permutar los subíndices de cada variable.

existen equilibrios de Nash simétricos en estrategias puras, es decir: no existe un par de precios idénticos cobrados simultáneamente por las firmas que constituyan un equilibrio de Nash. Esto nos conmina a realizar un análisis más exhaustivo en búsqueda de la resolución del juego de etapa debiendo ampliar la noción de estrategia en nuestro modelo extendiendo el concepto al de estrategias mixtas. Esto permitirá establecer un equilibrio respecto a una distribución de probabilidad sobre la decisión de precios de cada firma, lo que se conoce en economía como un escenario de dispersión de precios. El equilibrio de Nash en estrategias mixtas hallado será la noción inicial de solución sobre la cual se desarrollará este trabajo.

2.1 El juego de Etapa

Para constituir y analizar el juego de etapa se definirá inicialmente qué es una estrategia pura en el contexto del modelo planteado; esta es, básicamente, una elección puntual de un precio dentro del espacio de precios. Formalmente, $\forall i, j$ una estrategia pura en la forma normal del juego, $s_i := \{p_i | p_i \in [0,^+ \infty)\}$ donde $s_i \in S_i$. Luego s_i es la estrategia pura de la firma i, y $\pi_i(p_i, p_j)$ es la función de pagos correspondiente a la firma i. El *timing* del juego simultáneo es el siguiente:

1. Cada firma fija el precio del bien homogéneo que cobrará a los consumidores.
2. Los consumidores, informados y desinformados, observan completa y parcialmente (de forma respectiva) los precios fijados por las firmas y asignan su demanda.

En lo que sigue se mostrará que no existen bajo el esquema de modelación planteada equilibrios de Nash en estrategias puras simétricos, por tanto, acudiremos a la utilización de un concepto ampliado de estrategias, hallando así una noción de equilibrio tal, que permitirá desarrollar el contexto fundamental de este trabajo que es la interacción repetida. Como se mencionó anteriormente esta extensión particular de estrategias es lo que se conoce en la literatura de teoría de juegos como estrategias mixtas. Estas brindarán la posibilidad de establecer un equilibrio el cual estará conformado por un par de distribuciones de precios $(\Theta_i(p_i), \Theta_j(p_j))$, donde $\Theta_i : [0,^+ \infty) \to [0, 1]$, $\forall i, j$ y la expresión $\Theta_i(p_i)$ denota la función de distribución acumulada de p_i y, por tanto, $\theta_i(p_i) = \Theta'_i(p_i)$ es la función de densidad de probabilidad de p_i. El enfoque a desarrollar se concentra en analizar equilibrios simétricos, es decir un par de distribuciones de precios simétricas, $\Theta_i(p_i) = \Theta_j(p_j) = \Theta(p_i) = \Theta(p_j)$, tales que cumplan con el requisito fundamental de ser mejor respuesta a cada acción escogida por la firma rival[6]. Entonces, sea $p^* = {}^{c(I+U)}/_{(I+U)}$. Con $N = 2$, $p^* = CMe = CMg = c$.

Proposición 1. *La función de densidad de probabilidad $\theta_i(p_i)$ asignará $\theta_i(p_i) = 0$ para $p_i > r \vee p_i < p^* = c$, $\forall i, j$ con $i \neq j$.*

Demostración: Es fácil ver que si la firma i fija un precio tal que $p_i > r$, no existirán consumidores que estén dispuestos a consumir el bien a un precio más alto que su propia valoración (r), lo que es equivalente a decir que no existen consumidores que valoren en más que r el bien. Luego, si $p_i < p^* = c$, implica que $p^* = CMe = CMg$, por tanto, si $p_i < CMe$ se tiene que $\pi_i(p_i, p_j) < 0$. $\square$

[6] Siempre sujeto al supuesto de $N = 2$ firmas en el mercado.

Proposición 1 brinda, sencillamente, la noción lógica que escenarios sin sentido económico no son probables de ocurrir. Ahora se analizará la existencia de equilibrios de Nash simétricos en estrategias puras con la finalidad de esclarecer el resultado del juego de etapa.

Proposición 2. *No existen equilibrios de Nash en estrategias puras donde las firmas cobren precios idénticos.*

DEMOSTRACIÓN: Se conforma a partir de tres puntos. Si $p_i \in [c, r]$, entonces:

1. Si $p_i = p_j = c$. Bajo esta elección de precios de las firmas, será sencillo observar que existen incentivos unilaterales al desvío ya que $\pi_i(c, c) = c\left(\frac{I+U}{2}\right) - c\left(\frac{I+U}{2}\right) = \pi_j(c, c) = 0$. Entonces si la firma i cobra un precio $p_i > c$, por ejemplo $p_i = c + \varepsilon$, implica que obtiene como beneficio $\pi_i(c + \varepsilon, c) = (c + \varepsilon - c)\frac{U}{2} = (\varepsilon)\frac{U}{2} > 0$, es decir al desviarse y subir el precio se reasigna su demanda a sus consumidores cautivos, llevándose su proporción de consumidores desinformados consiguiendo así un beneficio mayor a cero. Por tanto $p_i = p_j = c$, no es un equilibrio de Nash.

2. Si $p_i = p_j$, $\forall p_i, p_j \in (c, r)$. Si las firmas fijan un precio simétrico mayor que el costo marginal y menor que la valoración de los consumidores, entonces es posible razonar tal como se lleva a cabo en el modelo de competencia en precios de Bertrand[7] y verificar que efectivamente existen incentivos unilaterales al desvío para cualquier firma si éstas escogen un par de precios idénticos (intuitivamente, el razonamiento nos indica que para cualquier par de precios idénticos, cualquier firma tiene un incentivo unilateral al desvío ya que si alguna disminuye el precio infinitesimalmente, esta se asigna toda la masa de consumidores informados más su proporción de desinformados obteniendo un beneficio mayor al de simplemente repartirse el mercado de forma simétrica). Por tanto $p_i = p_j$, $\forall p_i, p_j \in (c, r)$ no constituye un equilibrio de Nash.

3. Si $p_i = p_j = r$. Se procede de forma similar al primer punto. Se puede demostrar fácilmente que si la firma i cobra un precio $p_i < r$, es decir $p_i = r - \varepsilon$, se tiene que el beneficio obtenido será $\pi_i(r - \varepsilon, r) = (r - \varepsilon)\left(I + \frac{U}{2}\right) - c\left(I + \frac{U}{2}\right)$ mientras que $\pi_j(r - \varepsilon, r) = r\frac{U}{2} - c\frac{U}{2}$, donde $\pi_i(r - \varepsilon, r) > \pi_j(r - \varepsilon, r)$. Así, la firma i tiene incentivo a recortar su precio otorgandose de forma consecuente toda la masa de consumidores informados más la proporción de consumidores desinformados que le pertenece obteniendo un beneficio mayor que si decide conservar su precio en r; es decir, si las firmas fijan un precio idéntico e igual a r, alguna de estas tiene incentivos unilaterales al desvío. Así $p_i = p_j = r$ no es un equilibrio de Nash.

Así, los tres puntos anteriores completan la demostración. □

Por lo tanto, a partir de la Proposición 2, se desprende la no existencia de equilibrios de Nash en estrategias puras simétricos en el esquema de modelación utilizado. Así entonces, el análisis se enfocará en la resolución del juego de etapa bajo la noción de estrategias mixtas y se trabajará con el fin de establecer un equilibrio que permita extrapolar su resultado a un escenario multietápico para entender si la heterogeneidad informacional propicia o no conductas colusorias.

[7] Bertrand (1883) propuso un modelo de competencia oligopolista en donde las empresas se centran en el precio (no en cantidades, como el modelo antes propuesto por Cournot (1838)) como su variable de decisión, que se supone adoptada simultáneamente por todas ellas (Vega Redondo, 2000).

Hasta ahora el concepto de estrategia planteado está suscrito implícitamente a un escenario determinístico en la realización de cada acción ejecutada por una firma al momento de decidir qué precio cobrará a los consumidores en el mercado. Al no existir equilibrios simétricos en estrategias puras se extenderá este último concepto con la finalidad de otorgar aleatoriedad a las acciones a escoger, logrando establecer así un equilibrio que no sólo dependa de escenarios en los cuales las firmas ejecutan sus decisiones óptimas o de mejor respuesta bajo acciones meramente determinísticas. De esta forma, será conveniente entonces, recordar algunas definiciones útiles que permitirán contextualizar la aleatoriedad a implementar:

Definición 1. Sea $s_i \in S_i$ un conjunto finito de estrategias puras del jugador i. Una estrategia mixta del jugador i es una función $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ donde $\sigma_i(s_i) \geq 0$ y $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i = 1$.

Definición 2. El espacio de estrategias mixtas para cada jugador i es el conjunto de medidas de probabilidad definidas sobre su espacio de estrategias puras S_i. Se denotará, para cada jugador $i = 1, 2, ..., n$ por $\triangle(S_i) \coloneqq \Sigma_i$.

Definición 3. Si la $\#S_i = K$, entonces

$$\sigma_i \in \Sigma_i \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{R}^K : 0 \leq z_i \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^{K} z_i = 1 \right\}$$

Donde Σ_i es el simplex de dimensión $K-1$ (esto es, los vectores K-dimensionales no negativos cuya suma de componentes es igual a la unidad).

Definición 4. El soporte de $\sigma_i \in \Sigma_i$, es el conjunto definido como

$$\mathbf{SOP}(\sigma_i) \coloneqq \{ s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0 \}.$$

Definición 5. Con estrategias mixtas la función de pagos, la cual refleja utilidades del tipo von Neumann-Morgenstern, se extiende al conjunto de perfiles de estrategias mixtas $\Sigma \coloneqq \underset{i \in N}{\times} \Sigma_i$ en términos de pagos esperados. Luego $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Sigma$. Además $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$ con $\sigma_{-i} = (\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$ y $\Sigma_{-i} \coloneqq \underset{j \neq i}{\times} \Sigma_j$ con $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$. Así (por simplicidad, se conserva la notación $\pi_i(\cdot)$ para reflejar pagos efectivos y pagos esperados):

$$\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in \mathbf{SOP}(\sigma_i)} \sigma_i(s_i)\, \pi_i(s_i, \sigma_{-i})$$

Es el pago (beneficio) esperado para el jugador i cuando $\sigma \in \Sigma$ se lleva a cabo.

Así, para iniciar la búsqueda del equilibrio de Nash en estrategias mixtas se deberá definir el conjunto soporte para las estrategias planteadas en el juego. Es simple observar que, a partir de las Proposiciones 1 y 2, el $\mathbf{SOP}(\sigma_i) \neq \varnothing$. Luego, se muestra que:

Proposición 3. *$r \in \mathbf{SOP}(\sigma_i)$ y cumple con $r = \max\{\mathbf{SOP}(\sigma_i)\} = \sup\{\mathbf{SOP}(\sigma_i)\}$.*

Demostración: Sea $p_i = r - \varepsilon$ y $p_j < p_i$. Entonces, la firma j se asigna $\left(I + \frac{U}{2}\right)$ consumidores y la firma i se asigna $\frac{U}{2}$ consumidores. Suponga ahora que la firma i fija $p_i = r - \frac{\varepsilon}{2}$ y $p_j < p_i$. La firma j se asigna $\left(I + \frac{U}{2}\right)$ consumidores y la firma i se asigna $\frac{U}{2}$ consumidores, pero $\pi_i(r - \varepsilon, p_j) < \pi_i\left(r - \frac{\varepsilon}{2}, p_j\right)$.

Utilizando inductivamente este argumento, la firma i cobrará un p_i tal que:

$$\underset{\{p_i\}}{\arg\max}\left\{\pi_i\left(p_i,p_j\right)\mid p_j<p_i\right\} \tag{2}$$

donde este problema es equivalente a mostrar que existe una secuencia convergente tal que r es el precio que cumple con la condición anteriormente expuesta. Esto es, que el $\lim_{p_i\uparrow r}\, p_i=\lim_{n\to+\infty} r-\frac{\varepsilon}{n}=r$. Así, se deduce que $\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)$ es acotado superiormente siendo r una cota superior. Luego, utilizando lo expuesto en la Proposición 1 en conjunto con lo demostrado anteriormente se tiene que r además cumple con ser el $\max\left\{\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)\right\}$ dado que no existe un $p_i>r$ que pertenezca al conjunto soporte (esto es, para $r'>r$, $\pi\left(r'\right)=0$). Finalmente tenemos que r cumple con ser el $\sup\left\{\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)\right\}$ ya que r es cota superior del conjunto soporte y no existe un $p_i<r$ que sea cota superior del conjunto soporte. □

Utilizando este hecho, es posible plantear la siguiente proposición:

Proposición 4. $\underline{p}\in\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)$ *y cumple con* $\underline{p}=\min\left\{\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)\right\}=\inf\left\{\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)\right\}$.

Demostración: Para comenzar se definirá inicialmente el precio mínimo al cual la firma está indiferente entre cobrar ese precio, capturando por tanto a los consumidores informados como a su proporción de consumidores desinformados y r, donde sólo captura su proporción de consumidores desinformados, es decir:

$$p_{\min}:=\left\{\underline{p}\middle|\pi_i\left(\underline{p}\right)=\pi_i\left(r\right)\right\} \tag{3}$$

donde (3) cumple con la noción económica de una estrategia mixta para el juego G. Sabiendo además que $\pi_i\left(r\right)=r\frac{U}{2}-c\frac{U}{2}$ cuando $\underline{p}<r$. Entonces, a partir de (3) tendremos que la condición $\pi_i\left(\underline{p}\right)=\pi_i\left(r\right)$ es equivalente a $\underline{p}\left(I+\frac{U}{2}\right)-c\left(I+\frac{U}{2}\right)=r\frac{U}{2}-c\frac{U}{2}$. Despejando $\underline{p}$:

$$\underline{p}=\frac{r\frac{U}{2}+cI}{\left(I+\frac{U}{2}\right)} \tag{4}$$

Luego, $\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)$ es acotado inferiormente siendo $\underline{p}$ una cota inferior dado que $\underline{p}<r$ y que $\Pr\left(p_i=\underline{p}\right)>0$ debido a que $\pi_i\left(\underline{p},p_j\right)>0\ \forall i,j$. Por otra parte es simple observar que cualquier $p'<\underline{p}$ es estrictamente dominado por r, por tanto $\underline{p}$ es además el $\min\left\{\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)\right\}$. Finalmente $\underline{p}$ cumple con ser el $\inf\left\{\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)\right\}$ ya que $\underline{p}$ es cota inferior del conjunto soporte y no existe un $p_i>\underline{p}$ que sea cota inferior del conjunto soporte. □

Proposición 3 y Proposición 4 permiten caracterizar completamente el conjunto soporte, donde $\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)=\left[\underline{p},r\right]$.

Un último punto necesario ha considerar antes de presentar formalmente el resultado de equilibrio bajo estrategias mixtas es definir que la función de distribución $\Theta_i\left(p_i\right)$ es continua $\forall i,j$ en el $\mathbf{SOP}\left(\sigma_i\right)$. Así, se muestra que:

Proposición 5. *No existen puntos de masa en las estrategias de precios de equilibrio.*

DEMOSTRACIÓN: Por absurdo. Suponga la existencia de algún $p \in \mathbf{SOP}(\sigma_i)$ tal que $\Pr(p) > 0$, $\forall i, j$ (es decir, un punto de masa en p). Luego, podría ocurrir que $p_i = p_j = p$ con alguna probabilidad positiva. Entonces, dado $p_i = p_j = p$, alguna firma puede desviarse y cobrar $p - \varepsilon$ asignando la misma probabilidad que su rival le asigna a p. Esto implica que la firma que establece una $\Pr(p - \varepsilon) > 0$ obtiene como demanda a la totalidad de los consumidores informados más su proporción de consumidores desinformados con alguna probabilidad positiva. Razonando de igual forma para cualquier $p_i \in \mathbf{SOP}(\sigma_i)$, se infiere que la $\Pr(p_i = p_j) = 0$ y por tanto no puede ocurrir que $\Pr(p) > 0$ con $p \in \mathbf{SOP}(\sigma_i)$, lo cual es equivalente a decir que:

$$\int_{p_i}^{p_j} \theta_i(p_i)\, dp_i = 0, \text{ con } p_i = p_j \tag{5}$$

y así $\Pr(p_i = p_j) = 0$, $\forall p_i \in \mathbf{SOP}(\sigma_i)$. Finalmente, sin pérdida de generalidad, se podrá argumentar que la función de densidad de probabilidad de p_i: $\theta_i(p_i) = \Theta_i'(p_i)$ en todo punto, donde $\Theta_i(p_i)$ es la función de distribución acumulada continua de p_i. $\square$

Proposición 5 garantiza la existencia de aleatorización de precios por parte de las firmas teniendo como consecuencia un escenario de dispersión temporal[8] de precios en el mercado, tal como se analiza a continuación. La totalidad de proposiciones planteadas permitirán determinar la distribución de precios de equilibrio $\Theta_i(p_i)$ para la firma representativa i que cobra un precio $\underline{p} < p_i < r$, lo que es correspondiente a resolver el siguiente problema:

$$\pi\left(\underline{p}\right) = \pi\left(\underline{p} < p_i < r\right) \tag{6}$$

lo cual define una estrategia mixta en el $\mathbf{SOP}(\sigma_i)$, es decir, la firma i debe estar indiferente entre cobrar un precio $\underline{p}$ y un $p_i \in \left(\underline{p}, r\right)$. Como el enfoque de búsqueda es encontrar equilibrios simétricos, sólo se determinarán las distribuciones del tipo $\Theta(p_i)$, $\forall i, j$. Luego, la ecuación (6) es equivalente a:

$$\left(\underline{p} - c\right)\left(I + \frac{U}{2}\right) = \Theta(p_i)\left[(p_i - c)\frac{U}{2}\right] + (1 - \Theta(p_i))\left[(p_i - c)\left(I + \frac{U}{2}\right)\right].$$

Realizando el álgebra correspondiente (ver detalles en Apéndice) se tendrá que:

$$\Theta(p_i) = \frac{\left(p_i - \underline{p}\right)\left(I + \frac{U}{2}\right)}{(p_i - c)\, I} \tag{7}$$

y teniendo en cuenta lo obtenido en la ecuación (4), que caracteriza $\underline{p}$, podemos combinar la ecuación (7) con esta última para obtener:

$$\Theta(p_i) = 1 + \frac{U(p_i - r)}{2I(p_i - c)} \tag{8}$$

entonces, a partir de (8) tenemos el siguiente resultado:

[8] Dispersión Temporal de Precios: Escenario en el que una firma fija precios diferentes en distintos momentos del tiempo.

Teorema 1. *El equilibrio de Nash simétrico cuando existen $N = 2$ firmas, es el equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico caracterizado por la distribución de precios de equilibrio*

$$1 - \Theta(p_i) = \frac{U(r - p_i)}{2I(p_i - c)}.$$

Teorema 1 ilustra el resultado principal del juego de etapa modelado, es decir, la presencia de la aleatorización de precios por parte de las firmas dado un escenario de demanda con consumidores heterogéneos en su nivel de información respecto a los precios del mercado. Se observa que esta característica sobre los consumidores genera un equilibrio que culmina en una hecho conocido en economía como dispersión temporal de precios: las firmas al poseer una demanda cautiva, a diferencia del clásico duopolio *à la Bertrand* con bienes homogéneos y consumidores libres, reciben beneficios indistintamente del nivel de precios fijado, esta significativa diferencia es lo que otorga la intuición económica para entender el por qué de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico[9]: la existencia de un *trade-off* entre la potencial disminución del precio para captar a un mayor número de consumidores informados versus la posibilidad de no asignarse un mayor número de consumidores informados debido a no poseer necesariamente el menor precio en el mercado y, por tanto, perder margen respecto a la demanda cautiva representada por su proporción de consumidores desinformados.

En lo que sigue, nos encargaremos de desarrollar el superjuego (o juego repetido) para entender que rol juega la información de los consumidores, desde un punto de vista dinámico, respecto al desarrollo de acuerdos colusivos por parte de las firmas.

2.2 Superjuego

En la subsección anterior se caracterizó el juego de etapa necesario para conformar la interacción repetida entre las firmas. En esta subsección se estudiará dicha interacción con la finalidad de entender cómo la heterogeneidad informacional sobre los precios de mercado presente en la estructura de los consumidores incide en la propensión a establecer acuerdos colusivos entre las firmas. El instrumental a utilizar son los juegos repetidos (también conocido en la literatura como superjuegos), estos juegos pertenecen a una clase particular de juegos dinámicos con la singularidad que las condiciones subyacentes de la interacción inicial permanecen *estables* a lo largo del proceso (tiempo), es decir, poseen una estructura temporal sencilla de repetición de lo que se conoce como juego de etapa. Así, dado el juego de etapa $G = \left\{N, (S_i)_{i \in N}, (\pi_i)_{i \in N}\right\}$ con $N = 2$ firmas: $\{i, j\}$, en el cual los pagos están acotados (existe un valor $\dot{p} \in \mathbb{R}$, tal que $|\pi_i(\dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)| < \dot{p}$, $\forall i, j$, $\forall(\dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$) y $\boldsymbol{\delta} := (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ un vector de factores de descuento, donde $\delta_i < 1$, $\forall i$, llamamos superjuego al juego repetido infinitamente $G^{\infty}(\boldsymbol{\delta})$, al juego que cumple con:

1. Antes del comienzo, el juego es de dominio público:

    (a) Que el factor de descuento de cada jugador i es δ_i.

    (b) Que tras cualquier etapa k el juego puede continuar en la etapa posterior.

[9] (Es decir, dispersión temporal de precios en el mercado como resultado del juego simultáneo).

(c) Que los pagos (beneficio obtenido por la firma) de $G^{\infty}(\boldsymbol{\delta})$ son, para cada jugador i, el valor presente V_i (para el factor de descuento δ_i) de la sucesión infinita de sus pagos de etapa.

2. Antes del comienzo de cualquier etapa, son de dominio público las jugadas realizadas en todas las etapas anteriores.

Adicionalmente será útil recordar la siguiente definición la cual explica el concepto de *historia* del juego en un período o etapa concreta:

DEFINICIÓN 6: Dado el juego de etapa $G = \left\{N, (S_i)_{i\in N}, (\pi_i)_{i\in N}\right\}$ con $N = 2$ firmas: $\{i, j\}$ y el juego repetido $G^{\infty}(\boldsymbol{\delta})$, las **t-historias** o **historias del juego hasta el momento t**, denotadas h^t, recogen toda la experiencia pasada del juego hasta llegar a ese momento, es decir, todas las decisiones tomadas por los n jugadores en las $t-1$ etapas anteriores. El conjunto de todas las t-historias h^t es:

$$H^t = \left\{\left\{\left(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\right)\right\}_{k=1,2,\ldots,t-1} | a_i^k \in A_i\right\}$$

donde A_i es el conjunto de acciones del jugador i y, por tanto, a_i^k ha de interpretarse como la acción realizada por el jugador i en la etapa k.

En lo que sigue se supondrá que el mismo factor de descuento δ es válido para todos los jugadores, por tanto $G^{\infty}(\delta)$ será la denominación para el superjuego, y se mantendrá la estructura de simultaneidad en el juego de etapa G.

La idea principal de esta modelación es encontrar el factor de descuento crítico bajo el cual las firmas están dispuestas a sostener un acuerdo colusivo sujeto a las diversas estrategias de cooperación y castigo implementadas por estas, obteniendo así, un marco de análisis comparativo bajo el cuál se logre cuantificar qué rol juega la información sobre los precios en una estructura de mercado duopólica. Se analizarán dos tipos de estrategias a adoptar por parte de las firmas: las clásicas estrategias *Grim Trigger* y las estrategias de castigo óptimo conocidas en la literatura como estrategias *Optimal Penal Code*.

2.2.1 Estrategias *Grim Trigger*

Iniciamos la construcción del superjuego utilizando un tipo de estrategia conocida en la literatura de teoría de juegos como estrategias *Grim Trigger* (o estrategias de Gatillo). Estas estrategias fueron planteadas inicialmente por Friedman (1971). Este tipo de estrategias tiene como finalidad sostener un acuerdo colusivo mediante la amenaza de ejecutar indefinidamente el perfil que constituye el equilibrio de Nash en el juego de etapa (es decir, el equilibrio no cooperativo), generando así una amenaza creíble (por cuanto induce un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del superjuego) desde el momento en que una firma se desvía en alguna historia anterior.

Será conveniente recordar la siguiente igualdad respecto a la masa de consumidores:

$$M = I + U = 1 \tag{9}$$

Así, por (9) sabemos que $U = 1 - I$, luego se definen las siguientes igualdades:

$$\frac{U}{2} = \frac{1}{2} - \frac{I}{2} \tag{10}$$

$$I+\frac{U}{2}=\frac{1}{2}+\frac{I}{2} \tag{11}$$

Sea s_i^t la estrategia del jugador i en el período $\{t\}_{t=0}^{\infty}$. Entonces la estrategía *Grim Trigger* viene dada por:

$$s_i^t=\begin{cases} r & \text{para } t=0 \\ s_i^t\left(h^t\right)= & \begin{cases} r & \text{si} \quad h^t=\left(\left(r,r\right),\left(r,r\right),...,\left(r,r\right)\right) \ \forall t>0 \\ p_i|\Theta\left(p_i\right) & \text{otro caso} \end{cases} \end{cases}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \pi_i^{\mathrm{c}} &= \text{Beneficio cooperativo de la firma } i \\ \pi_i^{\mathrm{d}} &= \text{Beneficio de desvío de la firma } i \\ \pi_i^{\mathrm{nc}} &= \text{Beneficio no cooperativo de la firma } i \end{aligned}$$

Entonces, debemos analizar como se comportan las firmas bajo los siguientes esquemas:

1. Firmas $\{i,j\}$ cooperan (es decir, cumplen con la colusión tácita[10]) cobrando $p_i=p_j=r$.
2. Firma i se desvía del acuerdo cooperativo fijando un precio $\underline{r}=r-\varepsilon\approx r$.
3. Firmas $\{i,j\}$ no cooperan por tanto fijan un $p_i=\{p_i|\Theta\left(p_i\right)\}$, es decir, compiten fijando un precio de acuerdo a la distribución de precios de equilibrio.

Comenzamos analizando el escenario 1. en el cual las firmas cooperan (coluden) cobrando un precio $p_i=p_j=r$. El beneficio cooperativo de las firmas viene dado por $\pi_i^{\mathrm{c}}\left(r,r\right)=\left(r-c\right)\left(I/2+U/2\right)=\pi_j^{\mathrm{c}}\left(r,r\right)$. Utilizando la ecuación (9), se tiene que:

$$\pi_i^{\mathrm{c}}=\frac{\left(r-c\right)}{2} \tag{12}$$

En el punto 2. la firma i se desvía del acuerdo cooperativo fijando un precio $\underline{r}=r-\varepsilon\approx r$. Es decir, $\pi_i^{\mathrm{d}}:=\pi_i^{\mathrm{d}}\left(p_i=\underline{r}|p_j=r\right)$. Así, $\pi_i^{\mathrm{d}}\left(\underline{r},r\right)=\left(\underline{r}-c\right)\left(I+U/2\right)$. Luego por la ecuación (10) y aplicando el hecho que $\underline{r}=r-\varepsilon\approx r$:

$$\pi_i^{\mathrm{d}}=\left(r-c\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{I}{2}\right) \tag{13}$$

Luego para el punto 3. la firma i y la firma j no cooperan (es decir, compiten), por tanto, juegan su estrategia mixta dada por el Teorema 1, por tanto, $\pi_i^{\mathrm{nc}}\left(p_i|\Theta\left(p_i\right)\right)$ se define por:

$$\pi_i^{\mathrm{nc}}\left(p_i|\Theta\left(p_i\right)\right)=\left[1+\frac{U\left(p_i-r\right)}{2I\left(p_i-c\right)}\right]\left(p_i-c\right)\frac{U}{2}+\left[\frac{U\left(r-p_i\right)}{2I\left(p_i-c\right)}\right]\left(p_i-c\right)\left(I+\frac{U}{2}\right) \tag{14}$$

[10] Asumimos la prohibición legal de un acuerdo explícito de cooperación como principio para la exclusión sobre la competencia en el mercado.

Realizando el álgebra correspondiente (ver detalles en Apéndice) y utilizando la ecuación (10), se obtiene el siguiente resultado:

$$\pi_i^{\mathrm{nc}} = (r-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right) \tag{15}$$

Así, estamos en condiciones de establecer la restricción de compatibilidad de incentivos (IC) bajo el esquema de estrategias *Grim Trigger* donde será conveniente sostener el acuerdo colusivo. Entonces, para una firma cualquiera, será compatible en incentivos sostener un acuerdo colusivo si y sólo si:

$$V_i^{\text{cooperar}} \geq V_i^{\text{no cooperar}} \qquad \text{(IC)}$$

Donde V_i indica el valor presente de los flujos futuros de beneficios obtenidos al seguir (cooperar) o no (no cooperar) con el acuerdo colusivo. Luego, podemos calcular cada uno de estos flujos a partir de las siguientes definiciones:

$$V_i^{\text{cooperar}} := \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_i^{\mathrm{c}} = \left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{(r-c)}{2} \tag{16}$$

$$V_i^{\text{no cooperar}} := \pi_i^{\mathrm{d}} + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \pi_i^{\mathrm{nc}} = (r-c)\left(\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)(r-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right) \tag{17}$$

Reescribiendo (IC) en términos de las ecuaciones (16) y (17), se tiene que:

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{(r-c)}{2} \geq (r-c)\left(\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)(r-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right) \tag{18}$$

Entonces, a partir de la ecuación (18) se encuentra el δ crítico que permite que la estrategia *Grim Trigger* determine un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS). Este δ crítico lo definiremos como $\delta_{\mathrm{CH}}^{\mathrm{GT}}$ y su valor está dado por la siguiente desigualdad (ver detalles en Apéndice):

$$\delta_{\mathrm{CH}}^{\mathrm{GT}} \geq \frac{1}{2} \tag{19}$$

Será interesante analizar adicionalmente el modelo *à la Bertrand* en el cual los consumidores son completamente homogéneos respecto al nivel de información referente a los precios en la economía (i.e. conocen completamente el vector de precios) para así establecer un marco comparativo que permita distinguir el valor de la información que poseen los consumidores, condicional al esquema de modelación, esto es: se busca comparar el factor de descuento obtenido con consumidores heterogéneos versus el factor de descuento obtenido con consumidores homogéneos. Es fácil ver que el beneficio cooperativo en el modelo *à la Bertrand* con información homogénea ($\mathring{\pi}_i^{\mathrm{c}}$) será $\mathring{\pi}_i^{\mathrm{c}} = {}^{(r-c)}/_{2}$. Esto se explica ya que si ambas firmas coluden bajo información homogénea de los consumidores, la no existencia de demanda cautiva nos entrega el esquema clásico del modelo *à la Bertrand* estudiado en la teoría de juegos, es decir, al cooperar (conformando una colusión tácita) la estrategia que maximiza los beneficios de las firmas es coordinar el precio máximo que es igual a la máxima disposición a pagar por parte de los consumidores, esto es, $p_i = r$, $\forall i, j$. Luego el beneficio por romper el acuerdo cooperativo en una fase $k \in \{t\}_{t=0}^{\infty}$ cualquiera (i.e. el beneficio de desvío: $\mathring{\pi}_i^{\mathrm{d}}$) vendrá dado por

$\mathring{\pi}_i^{\mathrm{d}} = (r-c)$[11]. Finalmente el beneficio obtenido en la fase de castigo ($\mathring{\pi}_i^{\mathrm{nc}}$) para la firma que rompe el acuerdo cooperativo es $\mathring{\pi}_i^{\mathrm{nc}} = 0$, ya que la no existencia de demanda cautiva obliga a las firmas a competir disminuyendo el precio hasta fijar un $p_i = c$, lo cual establece el único equilibrio de Nash en estrategias puras en el juego de etapa con consumidores homogéneos. Luego, analizando la interacción repetida para este juego, se calcula el δ crítico: $\delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GT}}$ a partir de la $\left(\mathrm{I}\mathring{\mathrm{C}}\right)$ correspondiente, así:

$$\mathring{V}_i^{\text{cooperar}} \geq \mathring{V}_i^{\text{no cooperar}} \qquad \left(\mathrm{I}\mathring{\mathrm{C}}\right)$$

$$\mathring{V}_i^{\text{cooperar}} := \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \mathring{\pi}_i^{\mathrm{c}} = \left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{(r-c)}{2} \tag{20}$$

$$\mathring{V}_i^{\text{no cooperar}} := \mathring{\pi}_i^{\mathrm{d}} + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \mathring{\pi}_i^{\mathrm{nc}} = (r-c) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)(0) \tag{21}$$

Reescribiendo la $\left(\mathrm{I}\mathring{\mathrm{C}}\right)$ a partir de las ecuaciones (20) y (21) se tendrá:

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{(r-c)}{2} \geq (r-c) \tag{22}$$

Despejando δ de la ecuación (22) encontramos el $\delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GT}}$ que establece un ENPS en el superjuego *à la Bertrand* con consumidores homogéneos, el cual es:

$$\delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GT}} \geq \frac{1}{2} \tag{23}$$

Es decir, se cumple que:

$$\delta_{\mathrm{CH}}^{\mathrm{GT}} = \delta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GT}} \geq \frac{1}{2}$$

La pregunta natural de este último resultado es: por qué ocurre esto. Un primer acercamiento para estructurar una respuesta a esta pregunta proviene de recordar la conjetura inicial planteada en esta investigación la cual señalaba que los consumidores cautivos (desinformados) beneficiarían a los consumidores libres (informados) y, por tanto, sostener un acuerdo colusivo sería más complejo (i.e. se propicia la competencia). A partir de los resultados obtenidos se observa que dada la utilización de estrategias del tipo *Grim Trigger* la conjetura planteada pierde validez, es decir, la información a la cual están sujetos los consumidores no es relevante: se rompe el paradigma informacional el cual indica que mayor presencia de información siempre es mejor para el mercado (a modo de ejemplo, una reducción de los costos de búsqueda a los consumidores como herramienta de política). Por otra parte, observemos la estructura de pagos bajo los distintos esquemas informacionales, estos dejarán en evidencia de manera explícita el por qué no existe diferencia en la propensión a establecer un acuerdo colusivo cuando las firmas utilizan estrategias *Grim Trigger* respecto al modelo clásico *à la Bertrand*. Así, podemos ver que:

$$\mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{c}} - \pi_{CH}^{\mathrm{c}} = \frac{(r-c)}{2} - \frac{(r-c)}{2} = 0 \tag{24}$$

[11] Utilizamos el hecho que $\underline{r} = r - \varepsilon \approx r$ y, por tanto, $\mathring{\pi}_i^{\mathrm{d}} = (\underline{r} - c) = (r-c)$.

$$\mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{d}} - \pi_{CH}^{\mathrm{d}} = (r-c) - (r-c)\left(\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right) = (r-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right) > 0 \tag{25}$$

$$\mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{nc}} - \pi_{CH}^{\mathrm{nc}} = 0 - (r-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right) = -(r-c)\left(\frac{1}{2} - \frac{I}{2}\right) < 0 \tag{26}$$

Finalmente, sumando las ecuaciones (25) y (26) tenemos:

$$\left(\mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{d}} - \pi_{CH}^{\mathrm{d}}\right) - \left(\mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{nc}} - \pi_{CH}^{\mathrm{nc}}\right) = 0 \tag{27}$$

Es decir, se observa con total precisión que las ganancias obtenidas por desvío (fase de desvío) bajo los distintos esquemas se compensan perfectamente con las pérdidas generadas bajo competencia (fase no cooperativa). La intuición económica es que la propia existencia de consumidores cautivos genera una disminución en los beneficios de desvío $\left(\mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{d}} > \pi_{CH}^{\mathrm{d}}\right)$, es decir, el desvío es menos rentable cuando existe la presencia de demanda cautiva y, por otra parte, los beneficios generados por la competencia son mayores cuando existe esta heterogeneidad informacional $(\pi_{CH}^{\mathrm{nc}} > \mathring{\pi}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{nc}})$, esto es: el castigo mediante este tipo de estrategias, sujeto al esquema informativo, es más laxo $(\pi_{CH}^{\mathrm{nc}} > 0)$. En definitiva, la presencia de demanda cautiva bajo un escenario dinámico no afecta la propensión a coludir cuando las empresas adoptan estrategias del tipo *Grim Trigger*. La existencia de esta relación entre disminución de beneficios al decidir desviarse del acuerdo cooperativo versus el aumento en beneficios al competir entrega el fundamento económico de la no discrepancia sobre el factor de descuento del modelo clásico.

Continuamos, en lo inmediato, con un cambio en las estrategias que seguirán las firmas. Modificamos ahora las estrategias *Grim Trigger* y recurrimos a un tipo de estrategias conocidas en la literatura como estrategias *Optimal Penal Code* (o estrategias de Penalización Óptima). Estas estrategias nos permitirán evidenciar de mejor manera el hecho que cuando existen castigos menos severos la información presente en los consumidores sí posee un rol fundamental.

2.2.2 Estrategias *Optimal Penal Code*

Como se planteó al finalizar la subsección anterior, en esta subsección se implementará un análisis de interacción repetida pero sujeto a nuevas estrategias a implementar por las firmas con el fin de hacer sostenible un acuerdo colusivo. Estas estrategias son las planteadas por Abreu (1986) y conocidas en la literatura como estrategias *Optimal Penal Code*. Estas estrategias, a diferencia de las estrategias *Grim Trigger*, soslayan el hecho de poseer una limitada capacidad de disuasión y un carácter indefinido sobre las fases de castigo remediando estos inconvenientes en desmedro de un aumento considerable en la complejidad de las estrategias a utilizar. El aporte de Abreu (1986) es fundamental en este sentido; logra demostrar que "*tal incremento de complejidad no es necesario si se recurre a naturales estrategias del tipo "Palo y Zanahoría"* (*Stick and Carrot*) *que despliegan tanto una potente capacidad disuasoria como una duración muy limitada de sus fases de castigo*" (Vega Redondo (2000)).

Así, se podrá entonces definir una estrategia la cual indique, a diferencia de su estrategia predecesora (*Grim Trigger*), que: sea p un cierto nivel de precio dado que es elegido de forma que el perfil $\mathbf{p} \equiv (p, p, \ldots, p)$ sea suficientemente costoso (provocando inclusive beneficios negativos a las firmas). Asociado a p consideramos las siguientes estrategias para las firmas $\{i, j\}$:

$$s_i^t = \begin{cases} p_i^t = r & \text{para } t = 0 \\ \left\{ \begin{array}{lll} \left[\forall - i = 1,2\,,\, p_{-i}^{t-1} = r\right] & \Rightarrow & p_i^t = r \\ \left[\forall - i = 1,2\,,\, p_{-i}^{t-1} = p\right] & \Rightarrow & p_i^t = r \\ p_i^t = p & \text{En otro caso} & \end{array} \right\} & \forall t = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Entonces, si las firmas interactúan a través de estas estrategias, el superjuego constará de subjuegos que se podrán agrupar en dos clases:

1. **Subjuegos de colusión**: Esto es, los resultados del período anterior (perfil de estrategia) fueron (r, r) o (p, p).

2. **Subjuegos de penalización**: Es decir, los resultados del período anterior no fueron (r, r) ni (p, p).

Luego para que las firmas $\{i, j\}$ jueguen estas estrategias y a su vez cumplan con ser ENPS, estas deben ser un equilibrio de Nash en cada clase de subjuegos.

Utilizando la notación anteriormente expuesta y definiendo $V_i\,(p)$ como el valor presente de recibir $\pi_i\,(p)$ en este período y luego π_i^{c} en lo sucesivo, se plantea $V_i\,(p)$ como:

$$V_i\,(p) = \pi_i\,(p) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\pi_i^{\mathrm{c}} \tag{28}$$

Por tanto, en los *subjuegos de colusión* se debe cumplir la siguiente restricción de compatibilidad de incentivos $\left(\mathrm{IC}^{\text{colusión}}\right)$:

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\pi_i^{\mathrm{c}} \geq \pi_i^{\mathrm{d}} + \delta V_i\,(p) \qquad \left(\mathrm{IC}^{\text{colusión}}\right)$$

Sustituyendo en la $\left(\mathrm{IC}^{\text{colusión}}\right)$ lo expresado en la ecuación (28), se tendrá:

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\pi_i^{\mathrm{c}} \geq \pi_i^{\mathrm{d}} + \delta\left[\pi_i\,(p) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\pi_i^{\mathrm{c}}\right] \tag{29}$$

Definiendo $\pi_i\,(p) = {}^{(p-c)}/_{2}$ y sustituyendo los beneficios por los valores ya conocidos, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{(r-c)}{2} \geq (r-c)\left(\frac{1}{2}+\frac{I}{2}\right) + \delta\left[\frac{(p-c)}{2} + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\frac{(r-c)}{2}\right] \tag{30}$$

Resolviendo la ecuación (30) para encontrar el $\delta^{\text{colusión}}$ crítico (detalles en Apéndice) se obtiene:

$$\delta^{\text{colusión}} \geq \frac{I\,(r-c)}{(r-p)} \tag{31}$$

Analizando ahora los *subjuegos de penalización*, cada firma debe preferir administrar el castigo a recibir $\pi_i^{\mathrm{dp}}\,(p)$ este período y comenzar nuevamente la penalización en el siguiente período, esto se traduce en la siguiente restricción de compatibilidad de incentivos $\left(\mathrm{IC}^{\text{penalización}}\right)$:

$$V_i\left(p\right) = \pi_i^{\mathrm{dp}}\left(p\right) + \left(\delta\right) V_i\left(p\right) \qquad \left(\mathrm{IC}^{\text{penalización}}\right)$$

donde $\pi_i^{\mathrm{dp}}\left(p\right) := \left(p-c\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{I}{2}\right)$ con $p \approx p - \varepsilon$[12]. Por tanto:

$$\pi_i\left(p\right) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\pi_i^{\mathrm{c}} \geq \pi_i^{\mathrm{dp}}\left(p\right) + \delta\left[\pi_i\left(p\right) + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\pi_i^{\mathrm{c}}\right] \tag{32}$$

Así. sustituyendo en la ecuación (32) los beneficios ya conocidos, se tendrá:

$$\frac{\left(p-c\right)}{2}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\frac{\left(r-c\right)}{2} \geq \left(p-c\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{I}{2}\right) + \delta\left[\frac{\left(p-c\right)}{2} + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\frac{\left(r-c\right)}{2}\right] \tag{33}$$

Resolviendo la ecuación (33) para encontrar el $\delta^{\text{penalización}}$ crítico (detalles en Apéndice) se obtiene:

$$\delta^{\text{penalización}} \geq \frac{I\left(p-c\right)}{r-p} \tag{34}$$

Debemos, entonces, comparar $\delta^{\text{colusión}}$ versus $\delta^{\text{penalización}}$, donde resulta sencillo verificar que:

$$\delta^{\text{colusión}} > \delta^{\text{penalización}}$$

Y, por consiguiente, el δ crítico que permite que la estrategia *Optimal Penal Code* sea un ENPS del superjuego es el $\delta^{\text{colusión}}$.

Analicemos entonces el $\delta^{\text{colusión}}$ para entender si existe o no injerencia de la información que poseen los consumidores (i.e. conocimiento total o parcial del vector de precios) en la propensión de un acuerdo colusivo por parte de las firmas. Recordando el resultado de la ecuación (31):

$$\delta^{\text{colusión}} \geq \frac{I\left(r-c\right)}{\left(r-p\right)}$$

podemos ver que si el p, es decir, el nivel de precios perteneciente a la estrategia *Optimal Penal Code* que resulta en una secuencia de precios lo suficientemente costoso tiende al costo marginal c, la expresión anterior se transforma en:

$$\delta_{p\to c}^{\text{colusión}} \geq I \tag{35}$$

Es decir, cuando el precio de disuasión utilizado en la fase de castigo en la estrategia *Optimal Penal Code* se aproxima a la máxima disuasión posible (esto es, el costo marginal c) el δ crítico que permite sostener un acuerdo colusivo depende de forma directa de la cantidad de consumidores informados presentes en la economía. Por tanto, el nivel informacional respecto a los precios de la economía y su disponibilidad para los consumidores va en directa relación con las posibilidades de establecer acuerdos colusivos. Es más, cuando existe un mercado atomizado por un grupo de consumidores que en su mayoría posee información completa respecto a los precios, establecer un acuerdo colusivo es altamente dificultoso: las firmas se verían obligadas a poseer una estructura de impaciencia muy baja, vale decir, a mayor número de consumidores informados en un mercado en el cual existe un duopolio

[12]El supraíndice dp de la expresión $\pi_i^{\mathrm{dp}}\left(p\right)$ significa desviarse de la penalización, por tanto, $\pi_i^{\mathrm{dp}}\left(p\right)$ es el beneficio obtenido por la firma al desviarse en la fase de penalización.

y, las firmas que lo componen utilizan estrategias del tipo penalización óptima para interactuar en la dinámica intertemporal, la posibilidades de establecer un acuerdo anticompetitivo se dificultan. Este resultado difiere completamente del establecido en la subsección anterior, la intuición de este resultado se desprende de la estructura de penalización intrínseca presente en las estrategias bajo las cuales compiten las firmas: la presencia de consumidores cautivos bajo un esquema de penalización extremadamente dura posee una relevancia implicita que genera un *"trade off"* respecto a los beneficios: las firmas compensan sus pérdidas por desvío con las ganancias de competir dada la existencia de esta demanda predeterminada, en cambio, cuando el castigo es severo pero la "confianza es recuperable" (i.e. el castigo es finito) la estructura informacional de los consumidores cobra relevancia (la conjetura inicial, con estrategias de penalización óptima, posee validez). Al existir esta reversión en el castigo (o "perdón" explícito) las firmas internalizan este hecho y, sumado a la presencia de consumidores cautivos, el temor a la penalización decrece ya que la penalización es finita y otorga de todas formas beneficios (bajo el caso $p \to c$, es decir, una amenaza dura, el beneficio de penalización se hace nulo, pero la estructura del juego le garantiza a la firma que esto sólo acontecerá por un tiempo finito y, por tanto, puede diseñar un comportamiento intertemporal que minimice esas pérdidas).

En concreto, cuando el esquema competitivo de un duopolio adopta esta estructura y existe presencia de heterogeneidad informacional en los consumidores resulta eficiente la presencia de una política que, por ejemplo, minimice los costos de búsqueda sobre los agentes permitiendo homogeneizar la información referente a los precios del mercado.

3. Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo un modelo de competencia duopolica *à la Bertrand* con una variante exógena dada por la existencia de una masa de consumidores heterogéneos en su nivel de información respecto a los precios presentes en el mercado. La idea fundamental de esta investigación ha sido intentar comprender que rol juega la información (i.e. conocimiento sobre el vector de precios) en un mercado con alta concentración, esto es: la diferencia estructural en los consumidores respecto al modelo clásico de competencia en precios en el cual la masa de consumidores posee información homogénea respecto a los precios de mercado podría propiciar dinámicas colusivas por parte de las firmas. Para esto se modeló en una primera instancia el juego de etapa sujeto a la estructura de heterogeneidad informacional por parte de los consumidores obteniendo una solución que difiere completamente de la noción de solución (equilibrio) del modelo *à la Bertrand* clásico, esto es: bajo la estructura de modelación propuesta el concepto de solución del juego de etapa resultó ser un equilibrio de Nash simétrico en estrategias mixtas el cual provoca un fenómeno conocido en economía como dispersión temporal de precios (las firmas aleatorizan su variable estratégica: precio). Este primer resultado era condición necesaria para lograr dilucidar la interrogante principal ya que para estudiar una interacción dinámica primero se debe establecer el escenario inicial conocido como juego de etapa. A partir de esto se aplicó el instrumental clásico de la teoría de juegos conocido como juegos repetidos o superjuegos. El propósito primordial fue entender, bajo diferentes formas de interacción entre las firmas, cómo la información de los consumidores afectaba el factor de descuento crítico que permite sostener un acuerdo colusivo.

En una primera instancia se estudió una interacción entre las firmas utilizando estrategias conocidas en la literatura como *Grim Trigger*, las cuales se caracterizan por poseer una fase de castigo extremadamente perjudicial para la firma que quiebra el acuerdo de colusión tácita. Bajo estas estrategias se evidenció que la información presente en los consumidores no jugaba un rol fundamental, por tanto, la existencia de consumidores cautivos ante esta interacción estratégica no incide en la conformación de acuerdos colusivos y por ende la implementación de políticas destinadas a entregar mayor información sobre los precios a los consumidores resulta ser ineficiente ya que se estarían destinando recursos a políticas subóptimas.

En un segundo escenario, se estudió la interacción entre las firmas modificando las estrategias utilizadas inicialmente sustituyendolas por estrategias del tipo penalización óptima conocidas en la literatura como *Optimal Penal Code*. Al implementar estas estrategias se dejó en evidencia que al modificar la estructura de penalización (penalizaciones finitas) el nivel de información que poseen los consumidores respecto a los precios de mercado resulta ser una varible que está en directa relación con las posibilidades de ejercer acuerdos anticompetitivos, por tanto, políticas que ejerzan un esfuerzo informativo sobre los consumidores parcialmente informados va en directo detrimento de los intereses anticompetitivos de las firmas. En resumen, desde un punto de vista dinámico, cuando las firmas compiten bajo estrategias sobre las cuales la penalización por quebrar la colusión tácita es extremadamente alta, que existan consumidores cautivos no es relevante para este análisis. Luego, cuando las firmas modifican esta forma de interactuar y aplican penalizaciones reversibles, desde el punto de vista dinámico, los consumidores cautivos son una pieza fundamental para los intereses anticompetitivos: una masa de consumidores mayormente informados dificulta las posibilidades de establecer acuerdos colusivos.

Finalmente extensiones naturales a este modelo son, a modo de ejemplo, el estudio sobre un oligopolio sujeto a una estructura informacional idéntica, es decir, como se ven afectadas las posibilidades de acuerdos colusivos en presencia de un número mayor de firmas. Por otra parte, un estudio más audaz consistiría en aplicar instrumental de juegos diferenciales y tratar este esquema teórico desde la perspectiva de un sistema dinámico. Finalmente una herramienta aún más contemporánea es el rol de la ambigüedad en los agentes que conforman acuerdos de cooperación y su comportamiento en el largo plazo.

4. Referencias

1. ABREU, D. (1988). "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting", Econometrica, Vol. 56, No. 2, pp. 383-396.

2. BAYE, M. ; D. KOVENOCK y C. DE VRIES (1992). "It Takes Two Tango: Equilibria in a Model of Sales", Games and Economic Behavior, Vol. 4, No. 4, pp. 493-510.

3. GIBBONS, R. (1992). *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*, Antoni Bosch, España.

4. JAMES, B. (1996). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil.

5. LIMA, E. (2014). *Curso de Análise vol. 1*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Brasil.

6. MAS-COLELL, A.; M. WHINSTON y J. GREEN (1995). *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, USA.

7. PEREZ, J.; J. JIMENO y E. CERDÁ (2004). *Teoría de Juegos*, Pearson Prentice Hall, España.

8. STIGLER, G. (1961). "The Economics of Information", The Journal of Political Economy, Vol. 69, No. 3, pp. 213-225

9. VARIAN, H. (1980). "A Model of Sales", The American Economic Review, Vol. 70, No. 4, pp. 651-659.

10. VARIAN, H. (1981). "A Model of Sales, Errata", The American Economic Review, Vol. 71, No. 3.

11. VEGA REDONDO, F. (2000). *Economía y juegos*, Antoni Bosch, España.

12. VIVES, X. (2001). *Precios y Oligopolio Ideas clásicas y herramientas modernas*, Antoni Bosch, España.

Apéndice

Desarrollo **Teorema 1**

Condición (6) plantea el siguiente resultado:

$$\left(\underline{p}-c\right)\left(I+\frac{U}{2}\right)=\Theta\left(p_i\right)\left[\left(p_i-c\right)\frac{U}{2}\right]+\left(1-\Theta\left(p_i\right)\right)\left[\left(p_i-c\right)\left(I+\frac{U}{2}\right)\right]$$

Desarrollando algebraicamente esta expresión:

$$\begin{aligned}
\underline{p}\left(I+\tfrac{U}{2}\right)-c\left(I+\tfrac{U}{2}\right) &= \Theta\left(p_i\right)\left[\left(p_i-c\right)\tfrac{U}{2}\right]+\left(p_i-c\right)\left(I+\tfrac{U}{2}\right)-\Theta\left(p_i\right)\left(p_i-c\right)\left(I+\tfrac{U}{2}\right)\\
\Theta\left(p_i\right)\left(p_i-c\right)\left(I+\tfrac{U}{2}-\tfrac{U}{2}\right) &= \left(p_i-c\right)\left(I+\tfrac{U}{2}\right)+c\left(I+\tfrac{U}{2}\right)-\underline{p}\left(I+\tfrac{U}{2}\right)\\
\Theta\left(p_i\right)\left(p_i-c\right)I &= \left(p_i-\underline{p}\right)\left(I+\tfrac{U}{2}\right)\\
\Theta\left(p_i\right) &= \tfrac{\left(p_i-\underline{p}\right)\left(I+\frac{U}{2}\right)}{\left(p_i-c\right)I}
\end{aligned}$$

y sabiendo que $\underline{p}=\frac{r\frac{U}{2}+cI}{\left(I+\frac{U}{2}\right)}$, trabajando la expresión $\left(p_i-\underline{p}\right)$ se tendrá:

$$\begin{aligned}
p_i-\underline{p} &= \tfrac{p_i\left(I+\frac{U}{2}\right)-r\frac{U}{2}-cI}{I+\frac{U}{2}}\\
p_i-\underline{p} &= \tfrac{(2I+U)(p_i-c)-U(r-c)}{2I+U}
\end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en $\Theta\left(p_i\right)$:

$$\begin{aligned}
\Theta\left(p_i\right) &= \tfrac{\left[\frac{(2I+U)(p_i-c)-U(r-c)}{2I+U}\right]\left(\frac{2I+U}{2}\right)}{(p_i-c)I}\\
\Theta\left(p_i\right) &= \tfrac{(2I+U)(p_i-c)-U(r-c)}{2I(p_i-c)}\\
\Theta\left(p_i\right) &= \tfrac{2I(p_i-c)+U(p_i-c-r+c)}{2I(p_i-c)}\\
\Theta\left(p_i\right) &= 1+\tfrac{U(p_i-r)}{2I(p_i-c)}\\
1-\Theta\left(p_i\right) &= \tfrac{U(r-p_i)}{2I(p_i-c)}.
\end{aligned}$$

Donde $1-\Theta\left(p_i\right)$ es el resultado planteado. $\square$

Determinación de $\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i))$

$\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i))$ se definió como:

$$\begin{aligned}
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \left[1+\tfrac{U(p_i-r)}{2I(p_i-c)}\right](p_i-c)\tfrac{U}{2}+\left[\tfrac{U(r-p_i)}{2I(p_i-c)}\right](p_i-c)\left(I+\tfrac{U}{2}\right)\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \left[\tfrac{2I(p_i-c)+U(p_i-r)}{2I(p_i-c)}\right](p_i-c)\tfrac{U}{2}+\left[\tfrac{U(r-p_i)}{2I(p_i-c)}\right](p_i-c)\left(I+\tfrac{U}{2}\right)\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{[2I(p_i-c)+U(p_i-r)][U(p_i-c)]}{4I(p_i-c)}+\tfrac{U(r-p_i)(p_i-c)(2I+U)}{4I(p_i-c)}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{2IU(p_i-c)^2+U^2(p_i-r)(p_i-c)+U(r-p_i)(p_i-c)(2I+U)}{4I(p_i-c)}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{(p_i-c)\left[2IU(p_i-c)+U^2(p_i-r)-U(p_i-r)(2I+U)\right]}{4I(p_i-c)}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{2IU(p_i-c)+U^2(p_i-r)-U(p_i-r)(2I+U)}{4I}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{2IU(p_i-c)+U(p_i-r)[U-(2I+U)]}{4I}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{2IU(p_i-c)+U(r-p_i)2I}{4I}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{2IU[(p_i-c)+(r-p_i)]}{4I}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{2IU(r-c)}{4I}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= \tfrac{U(r-c)}{2}\\
\pi_i^{nc}(p_i|\Theta(p_i)) &= (r-c)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{I}{2}\right)
\end{aligned}$$

Así, concluye el desarrollo. □

Desarrollo de δ_{CH}^{EG}

Comenzando por la ecuación (18) y multiplicando por $(1-\delta)$ a ambos lados de la desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
\tfrac{(r-c)}{2} &\geq (1-\delta)(r-c)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{I}{2}\right)+\delta(r-c)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{I}{2}\right)\\
\delta(r-c)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{I}{2}\right)-\delta(r-c)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{I}{2}\right) &\geq (r-c)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{I}{2}\right)-\tfrac{(r-c)}{2}\\
\delta(r-c)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{I}{2}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{I}{2}\right) &\geq (r-c)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{I}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\\
\delta(r-c)I &\geq (r-c)\tfrac{I}{2}\\
\delta &\geq \tfrac{(r-c)}{(r-c)}\tfrac{I}{2I}\\
\delta_{\mathrm{CH}}^{\mathrm{GT}} &\geq \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Concluyendo el desarrollo para $\delta_{\mathrm{CH}}^{\mathrm{GT}}$. □

Desarrollo de $\delta^{colusión}$

A partir de la ecuación (30), tomamos esta desigualdad y multiplicamos por $2(1-\delta)$a ambos lados, así se tendrá:

$$\begin{aligned}
(r-c) &\geq (1-\delta)(r-c)(1+I)+\delta(1-\delta)(p-c)+\delta^2(r-c)\\
(r-c)-\delta^2(r-c) &\geq (1-\delta)\left[(r-c)(1+I)+\delta(p-c)\right]\\
(r-c)\left(1-\delta^2\right) &\geq (1-\delta)\left[(r-c)(1+I)+\delta(p-c)\right]\\
(r-c)(1+\delta) &\geq (r-c)(1+I)+\delta(p-c)\\
\delta(r-c)-\delta(p-c) &\geq (r-c)(1+I)-(r-c)\\
\delta\left[(r-c)-(p-c)\right] &\geq (r-c)I\\
\delta(r-p) &\geq (r-c)I\\
\delta^{\text{colusión}} &\geq \tfrac{I(r-c)}{(r-p)}
\end{aligned}$$

Concluyendo así el desarrollo para $\delta^{\text{colusión}}$. □

Desarrollo de $\delta^{penalización}$

A partir de la ecuación (33), tomamos esta desigualdad y multiplicamos por $2(1-\delta)$a ambos lados, así se tendrá:

$$\begin{aligned}
(1-\delta)(p-c)+\delta(r-c) &\geq (1-\delta)(p-c)(1+I)+\delta(1-\delta)(p-c)+\delta^2(r-c)\\
\delta(r-c)-\delta^2(r-c) &\geq (1-\delta)(p-c)(1+I)+\delta(1-\delta)(p-c)-(1-\delta)(p-c)\\
\delta(r-c)(1-\delta) &\geq (1-\delta)(p-c)\left[(1+I)+\delta-1\right]\\
\delta(r-c)(1-\delta) &\geq (1-\delta)(p-c)(I+\delta)\\
\delta(r-c) &\geq (p-c)(I+\delta)\\
\delta(r-c)-\delta(p-c) &\geq I(p-c)\\
\delta(r-c-p+c) &\geq I(p-c)\\
\delta^{\text{penalización}} &\geq \tfrac{I(p-c)}{(r-p)}
\end{aligned}$$

Concluyendo así el desarrollo para $\delta^{\text{penalización}}$. □