



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE**  
**INSTITUTO DE ECONOMIA**  
**MAGISTER EN ECONOMIA**

**TESIS DE GRADO**  
**MAGISTER EN ECONOMIA**

**Carrasco, Novoa, Diego José**

**Diciembre, 2015**



**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE  
INSTITUTO DE ECONOMIA  
MAGISTER EN ECONOMIA**

**Imposición de raíces unitarias bajo alta persistencia estacional y regular:  
Una comparación predictiva**

**Diego José Carrasco Novoa**

Comisión  
Klaus Schmidt-Hebbel  
Raimundo Soto  
Juan Urquiza  
Salvador Valdés

**Santiago, diciembre de 2015**

# IMPOSICIÓN DE RAÍCES UNITARIAS BAJO ALTA PERSISTENCIA ESTACIONAL Y REGULAR: UNA COMPARACIÓN PREDICTIVA

Diego J Carrasco-Novoa.\*

2015

## Resumen

*Predecir el comportamiento de variables económicas es una actividad importante para la toma de decisiones. En el caso de la conducción de la política fiscal y monetaria, casi todas las variables económicas a predecir tienen un alto nivel de persistencia cuya modelación está sujeta a mayores niveles de incertidumbre paramétrica. Bajo este contexto y apelando a que esta incertidumbre es mayor a la incertidumbre funcional, se ha analizado la utilidad de suponer persistencia infinita imponiendo raíces unitarias al modelamiento de variables económicas relevantes. Sin embargo, este análisis ha quedado limitado a series donde la alta persistencia se encuentra en el componente regular o estacional.*

*En este trabajo se compara la capacidad predictiva al imponer una raíz unitaria en alguno o en ambos componentes. Para ello, mediante simulaciones se compara la calidad de sus predicciones relativas a las del modelo estimado libremente, bajo un escenario de certidumbre funcional y alto nivel de persistencia paramétrica. Los resultados muestran que, en un contexto de muestra pequeña y en los horizontes más inmediatos la imposición de cualquier raíz unitaria resulta más beneficiosa que la predicción proveniente de un modelo libre. Al utilizar una muestra intermedia, nuevamente la imposición de una raíz unitaria resulta beneficiosa con los máximos valores. En la medida que se agrega un mayor número de datos mejora la estimación del modelo libre, pero para predecir al largo plazo con series de alta persistencia aún es beneficiosa la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional. Al incorporar incertidumbre funcional, a través de la prueba de Giacomini-White (2006) los resultados permiten concluir que es siempre recomendable realizar el ejercicio imponiendo una raíz unitaria en un componente y luego en el otro. Esto debido a que, dado que la estimación con muestra finita del modelo SARMA estará sujeta a su vez a incertidumbre paramétrica, dificultando la identificación de los parámetros poblacionales.*

*Finalmente, al comparar el comportamiento predictivo de las imposiciones que entregan la mayor precisión y los modelos de referencia que se utilizan para este tipo de series, el resultado es favorable respecto a los modelos AR(12), S-ES, D-ES, pero con respecto a los modelos Holt-Winters, la precisión de estas es equivalente en el corto plazo e inferior en el largo plazo. Sin embargo, las especificaciones sobre las cuales se impusieron estas raíces son las más parsimoniosas posibles para la realización de este tipo de análisis sobre modelos SARMA.*

---

\*Agradezco los valiosos comentarios, la paciencia y sugerencias de los profesores Raimundo Soto y Juan Urquiza. También agradezco especialmente la generosa colaboración de Carlos Medel. Con todos ellos sostuve largas discusiones con resultados enriquecedores para este trabajo. Asimismo, los comentarios, ayuda y consejos de Klaus Schmidt-Hebbel, Marcela Oyanedel, Carolina Abuauad, Hector Acuña, Martín Carrasco, Sergio Carrasco, Tono Carrasco, José Tomás Cerda y Matías Gonzalez. A Nicole Madariaga por sus comentarios y ayuda incondicional. Por su apoyo, a mi familia y a Gustavo Cerati por la inspiración. Finalmente agradezco a Conicyt por su aporte en el financiamiento del Magíster.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Revisión de literatura</b>	<b>3</b>
<b>3. El modelo base</b>	<b>5</b>
3.1. Aplicación empírica: una ilustración utilizando el IMACEC . . . . .	6
<b>4. Simulación de Monte Carlo y comparación de predicciones</b>	<b>10</b>
4.1. Generación del proceso estocástico . . . . .	10
4.2. Estrategia de comparación . . . . .	11
4.3. Estructuras del proceso estocástico . . . . .	12
4.4. Resultados . . . . .	13
<b>5. Aplicación empírica: proyección del IMACEC</b>	<b>19</b>
5.1. Prueba de Giacomini y White (2006) . . . . .	19
5.1.1. Modelos a comparar . . . . .	20
5.1.2. Resultados . . . . .	21
<b>6. Conclusiones</b>	<b>23</b>

# 1. Introducción

Predecir el comportamiento de variables económicas es una actividad importante para la toma de decisiones. Para ello, se utilizan modelos que están sujetos a un determinado nivel de incertidumbre funcional y paramétrica. La primera hace referencia al desconocimiento sobre el verdadero proceso que sigue la serie, debido a que la teoría no es clara en la forma en que se debe considerar su inercia. La segunda hace referencia a que no se conoce el tamaño poblacional de los parámetros a estimar, debido a las limitaciones de los métodos de estimación y al tamaño finito de la muestra.

En el caso de la conducción de la política económica, casi todas las variables sobre las cuales deben realizarse predicciones tienen un alto nivel de persistencia. Respaldando esto, Nelson y Plosser (1982) no rechazan la hipótesis nula de que los shocks que reciben variables relevantes de política en los Estados Unidos tengan efectos permanentes. Rudebusch (1992), analizando las mismas series, da cuenta del alto nivel de persistencia de estos shocks; sin embargo, a través de pruebas con mayor poder concluye que muchos de estos se extinguen en el largo plazo, aunque para dar cuenta de ello es necesario disponer tamaños de muestra considerablemente mayores.

Dado lo anterior, la modelación de este tipo de variables está sujeta a un mayor nivel de incertidumbre paramétrica y por ello en la literatura se ha analizado la validez de utilizar modelos no estacionarios que impongan raíces unitarias para predecir, apelando a que la incertidumbre paramétrica es mayor que la incertidumbre funcional. Sin embargo, el análisis ha quedado limitado a series donde el alto nivel de persistencia se encuentra solo en el componente regular o estacional.

En este trabajo se pretende comparar, bajo un contexto de alta persistencia estacional y regular, la capacidad predictiva de imponer una raíz unitaria en alguno o en ambos componentes. Para ello se realiza una ilustración utilizando el Índice Mensual de Actividad Económica (IMACEC) de la economía chilena, variable sobre la cual se toman importantes decisiones, siendo común que la autoridad económica realice predicciones sobre ella. Esta serie es caracterizada a través de un modelo de autorregresión con medias móviles estacionales (SARMA, por sus siglas en inglés) y a partir de su estimación se encuentra que presenta una alta persistencia en sus componentes autorregresivos regular y estacional, haciendo legítima la idea de imponerles raíces unitarias para su modelación.

Luego, se realiza una simulación de Monte Carlo calibrada, en donde se prueba y compara la calidad de las predicciones realizadas a través de estas imposiciones relativa a las del modelo estimado sin restricciones, bajo un escenario de certidumbre funcional y alto nivel de persistencia paramétrica. De esta manera, se busca proporcionar información útil para entender la relación entre la utilidad predictiva de estas y su horizonte de predicción, tamaño de muestra y nivel de persistencia. Fi-

nalmente, agregando incertidumbre funcional se realiza una comparación empírica a través de la prueba de Giacomini y White (2006), en la que también se contrastan respecto a los modelos de referencia utilizados para predecir este tipo de series.

El resto del artículo continúa de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta el estado del arte de este tipo de investigaciones. En la Sección 3 se presenta y fundamenta el modelo sobre el cual se caracterizará la serie IMACEC. Adicionalmente, se determinan las formas funcionales para las cuales se analizará la utilidad predictiva de imponer raíces unitarias en los distintos componentes. En la Sección 4 se desarrolla el algoritmo para la realización de la simulación de Monte Carlo y los resultados proporcionados por esta. En la Sección 5 se realiza un análisis empírico con el propósito de observar si los resultados se condicen con los de la simulación, proponer un determinado tipo de imposición y compararlo con los modelos de referencia. En la Sección 6 se exponen las conclusiones.

## 2. Revisión de literatura

La imposición de raíces unitarias consiste en asumir persistencia infinita en los componentes altamente persistentes de la inercia de la serie, restringiendo el valor de algunos parámetros y estimando los demás conforme a esta suposición. Su utilización para la modelación de series macroeconómicas no es algo nuevo y existen diversos estudios que analizan su utilidad predictiva. Sin embargo, dependiendo del tipo de proceso y persistencia de los componentes que caracterizan a una determinada variable, la calidad predictiva de las distintas imposiciones varía. Por lo tanto, las investigaciones tienden a evaluar la calidad de las predicciones de diversas especificaciones con diversas raíces, para distintas series y bajo distintos contextos.

Apelando a que la incertidumbre paramétrica es mayor que la incertidumbre funcional para la inflación, Atkeson y Ohanian (2001) imponen una raíz unitaria al componente AR(1) definiendo un paseo aleatorio y demuestran que la calidad de sus predicciones es mejor que las realizadas a través de la curva de Phillips. Ang et al. (2007) comparan la precisión de un paseo aleatorio respecto a la caracterización del proceso utilizando la metodología de Box y Jenkins (1973), curva de Phillips (1958) y modelos estructurales (lineales y no lineales). Sus resultados muestran que si bien hay métodos que funcionan mejor que otros, la combinación entre ellos genera mejores predicciones, como se demuestra en Pincheira (2012). Croushore (2010) define un paseo aleatorio con media móvil como modelo de referencia para la evaluación de las proyecciones realizadas por encuestas para Estados Unidos de alto uso en la literatura.

Pincheira y Medel (2012) estudian, sobre series altamente persistentes en su componente regular, la utilidad predictiva de imponer una raíz unitaria en dicho componente. Los autores concluyen que bajo este contexto, donde la incertidumbre funcional es mayor que la incertidumbre paramétrica, la definición de un paseo aleatorio entrega predicciones más precisas, en términos de error cuadrático medio, que la estimación libre de los parámetros para un proceso AR(1). Así también, estudian la inflación de tres países industrializados y demuestran que es mejor un “mal” modelo no estacionario que un modelo especificado correctamente, especialmente porque estos son estimados con muestra finita.

Incorporando estacionalidad, Pincheira y García (2012) analizan, para la inflación en Chile, la calidad predictiva de la imposición de una raíz unitaria en el componente regular sobre procesos con estacionalidad versus otros modelos univariados de referencia. Sus resultados demuestran que para horizontes de corto y largo plazo, el error cuadrático medio de la imposición de la raíz unitaria es menor que en los otros modelos de referencia. De forma similar, pero extendido a países con metas de inflación, Pincheira y Medel (2015) estudian sobre la base de una familia extendida de modelos autorregresivos con medias móviles, sin intercepto y con estacionalidad (DESARIMA), la calidad predictiva de la imposición de una raíz unitaria en el componente regular. Sus resultados demuestran que estas predicciones son más precisas en el corto plazo que otros modelos de referencia y también en el largo plazo para más de la mitad de los países considerados.

Apelando a la alta persistencia estacional de la serie de consumo de bienes no duraderos de Reino Unido y la del ingreso de Noruega, Clements y Hendry (1997) demuestran, sobre procesos SARMA, que la imposición de raíces unitarias en todo el componente estacional arroja predicciones sustancialmente mejores versus el caso sin restringir, e iguales o mejores que imponer un número limitado de raíces en este componente.

Como se observa, hay investigaciones que analizan la calidad predictiva de la imposición de raíces unitarias en los componentes de diversas series. Sin embargo, su análisis se ha limitado a series donde la alta persistencia se encuentra en el componente regular o estacional. Por lo tanto, para series altamente persistentes en su componente regular y estacional, una menor cantidad de investigaciones ha analizado la utilidad predictiva de imponer una raíz unitaria en alguno o en ambos de sus componentes. Asimismo, desproporcionadamente poca literatura se ha enfocado en la influencia de la imposición de raíces sobre el horizonte de predicción, el tamaño de muestra de estimación y el nivel específico de persistencia en sus componentes.

### 3. El modelo base

El teorema de Wold (1938) establece que cualquier proceso con media cero y estacionario en covarianza  $\{x_t\}$  puede ser representado de manera única por un componente lineal determinístico y un componente lineal no determinístico de la siguiente forma:

$$x_t = P[x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}] + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \epsilon_{t-j} \quad (1)$$

tal que:

- $P[\cdot]$  es el mejor predictor lineal para  $x_t$  y  $\epsilon_t = x_t - P[x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}]$  es un error de predicción.
- $\epsilon_t$  es ruido blanco,  $\epsilon \sim RB(0, \sigma^2)$ .
- Se asume el parámetro  $\theta_0 = 1$  y además  $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty$ .
- Todas las raíces del polinomio  $(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots)$  se encuentran fuera del círculo unitario. Donde  $L$  es un operador de rezago,  $L^i x_t = x_{t-i}$ .

Dado que no hay claridad sobre  $P[\cdot]$ , este se puede aproximar utilizando un modelo autorregresivo con  $p$  rezagos, generándose así la primera fuente de incertidumbre funcional sobre el verdadero proceso que sigue la variable  $x_t$ . Luego, la ecuación 1 se reescribe como un proceso ARMA definido en la ecuación 2:

$$x_t = \sum_{j=1}^p \phi_j x_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \epsilon_{t-j} \quad (2)$$

Dado que el componente media móvil tiene orden infinito, este debe ser truncado a un orden  $q < \infty$ , ya que en caso contrario no puede ser estimado con muestras finitas, surgiendo así una segunda fuente de incertidumbre funcional. Por lo tanto, la ecuación 2 se reescribe como la ecuación 3:

$$\Phi(L)x_t = \Theta(L)\epsilon_t \quad (3)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) \\ \Theta(L) &= (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \end{aligned}$$



son los polinomios autorregresivos (AR) y media móvil (MA). Luego, incorporando estacionalidad multiplicativa y la existencia de un intercepto ( $\delta$ ), se define en la ecuación 4 el proceso SARMA que será utilizado en esta investigación.

$$\phi(L)\phi_E(L^S)x_t = \delta + \Theta_E(L^S)\Theta(L)\epsilon_t \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} \phi(L) &= (1 - \phi_1L - \phi_2L^2 - \dots - \phi_pL^p) \\ \Theta_E(L^S) &= (1 - \theta_{E1}L^S - \theta_{E2}L^{2S} - \dots - \theta_{EQ}L^{QS}) \end{aligned}$$

son los polinomios AR y MA estacionales.  $S$  representa la frecuencia anual de la serie ( $S = 12$  para series mensuales).  $\delta$ ,  $\phi_j$ ,  $\phi_{Ej}$ ,  $\theta_j$  y  $\theta_{Ej}$  son los parámetros a estimar, los que por limitaciones metodológicas y del tamaño de muestra están sujetos a incertidumbre paramétrica. Adicionalmente, esta incertidumbre es creciente en los niveles de persistencia del proceso debido a que, a medida que esta aumenta, se requiere de muestras más grandes para observar la inercia que sigue la serie.

### 3.1. Aplicación empírica: una ilustración utilizando el IMACEC

En la figura 1 se presenta el correlograma total y parcial de la serie del logaritmo natural del IMACEC, estimado para la muestra 1985.1-2015.9. Al respecto, se observa que:

- La función de autocorrelación total va decayendo sin extinguirse en horizontes cortos, de manera que la serie puede ser caracterizada utilizando únicamente un componente AR.
- La función de autocorrelación parcial presenta correlaciones estadísticamente significativas en los rezagos 1, 12 y 13, lo que sugiere estacionalidad multiplicativa.

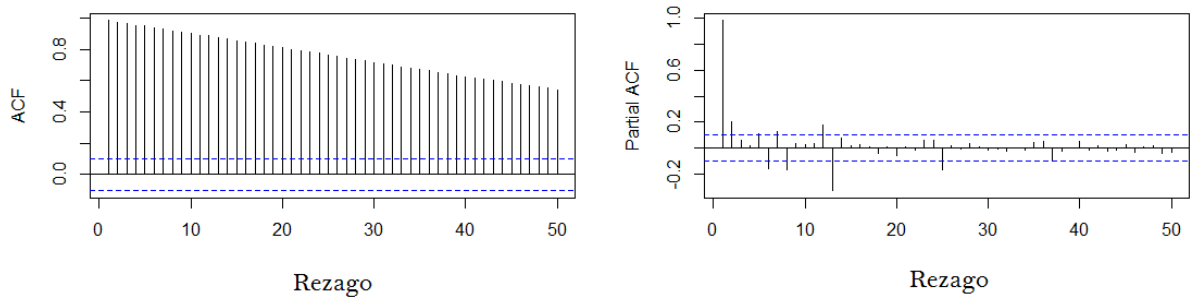


Figura 1: Correlograma función de autocorrelación total (ACF) y parcial (PACF). Serie logaritmo natural IMACEC. Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente, en la figura 2 se presenta el correlograma total y parcial del componente estacional<sup>1</sup>, el que da cuenta de que, dada su persistencia, puede ser caracterizado utilizando únicamente un componente AR, el cual presenta solo correlaciones significativas en el primer rezago.

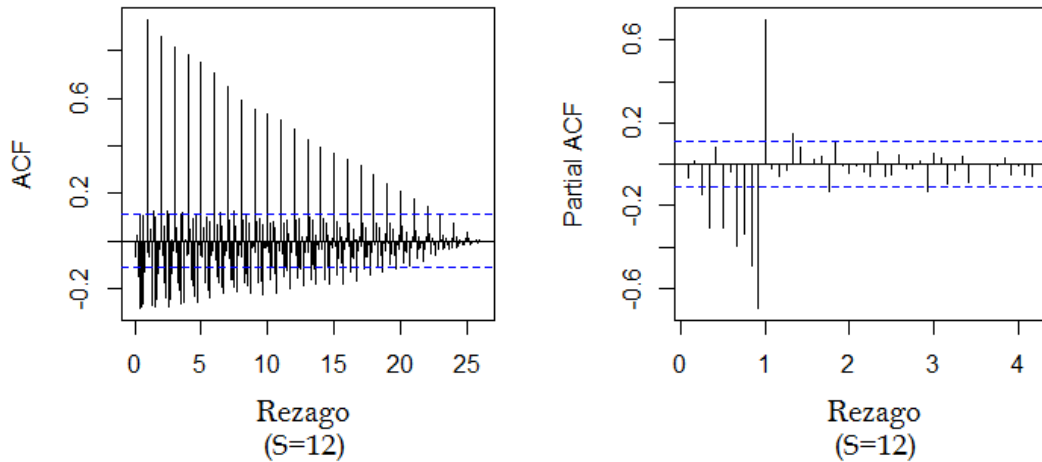


Figura 2: Correlograma función de autocorrelación total (ACF) y parcial (PACF). Serie componente estacional logaritmo natural IMACEC. Fuente: Elaboración propia.

Por consiguiente, modelándolo a través de un modelo SARMA como el definido en la ecuación 4 y en el intento de representar de forma parsimoniosa este proceso (y así aliviar las consecuencias de la incertidumbre paramétrica en las predicciones), es conveniente imponer las siguientes restricciones para su modelación:

- $Q = q = 0$
- $P = p = 1$

Luego, dadas las restricciones impuestas, la caracterización de la serie queda representada por la ecuación 5:

$$(1 - \phi L)(1 - \phi_e L^{12}) \ln(\text{IMACEC}_t) = \delta + \epsilon_t \quad (5)$$

donde  $\phi = \phi_1$  y  $\phi_e = \phi_{E1}$ .

En el cuadro 1 se proporcionan los resultados de estimación cuya validación se encuentra en el Anexo 1. Se observa que tanto el componente regular como el estacional de la serie presentan una

<sup>1</sup>Extraído a través de X-12-ARIMA.

alta persistencia cercana a la unidad, de manera que es válido pensar que se podrían imponer raíces unitarias en algún o en ambos componentes para predecir, apelando a que la incertidumbre paramétrica es mayor que la incertidumbre funcional.

Parámetro	Valor de estimación	Desviación estándar
$\hat{\delta}$	4.3821	0.3402
$\hat{\phi}$	0.964	0.0144
$\hat{\phi}_e$	0.937	0.0176
$\hat{\sigma}_\epsilon$	0.020	0.0010

Cuadro 1: Resultados estimación SARMA(1,0)(1,0). Método de estimación: máxima verosimilitud. Tamaño de muestra de estimación: 357 observaciones (1985.1-2015.9). Ver Anexo 1 para mayores detalles. Fuente: Elaboración propia.

Respaldando también la validez de imponer raíces unitarias en el cuadro 2, se presentan los resultados de la prueba HEGY (Hylleberg et al., 1990) sobre el logaritmo natural del IMACEC, los que dan cuenta de sus altos niveles de persistencia. En particular no se rechaza, al 90% de confianza, la hipótesis nula de que el efecto de los shocks sea permanente en el nivel de la serie, para su componente regular y en todos sus componentes estacionales (para mayores detalles ver Anexo 2).

Adicional a lo anterior, en la figura 3 se presenta la evolución del IMACEC para Chile durante el período 1985.1-2015.9 (Fuente: Banco Central de Chile). Al respecto se observa que la serie posee una tendencia creciente en el tiempo. Al aplicar la prueba de estacionariedad KPSS (Kwiatkowski et al., 1992) se rechaza al 95% de confianza la hipótesis nula de que la serie es estacionaria en torno a una tendencia determinística, favoreciendo la hipótesis alternativa de que la serie es integrada (para mayores detalles ver Anexo 3).

Hipótesis nula	Estadístico	Valor-p
RU en componente estacionario	-1.728	0.1
RU en componente estacional bimensual	-3.656	0.01
RU en componente estacional cuatrimestral	3.441	0.01
RU en componente estacional trimensual	12.927	0.1
RU en componente estacional semestral	19.471	0.1
RU en componente estacional frecuencia $5\pi/6$	3.432	0.01
RU en componente estacional anual	18.059	0.1

Cuadro 2: Resultados de la prueba HEGY. Para mayores detalles ver Anexo 2. Fuente: Elaboración propia

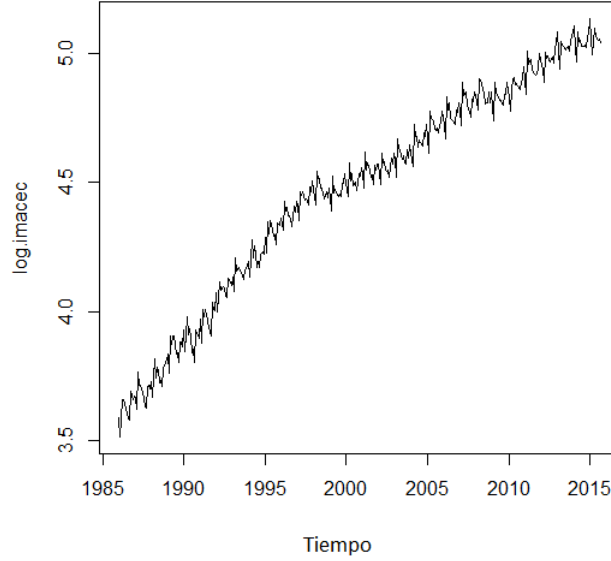


Figura 3: Evolución mensual del logaritmo natural IMACEC, 1985.1-2015.9. Fuente: Banco Central de Chile.

Entonces, las especificaciones que se utilizarán para predecir este tipo de series serán la estimación libre de los parámetros, la imposición de raíces unitarias en el componente regular, estacional y en ambos, apelando a que, dada la alta persistencia del proceso, la incertidumbre paramétrica es mayor a la incertidumbre funcional y que, por lo tanto, la imposición mejoraría la estimación de los parámetros no restringidos del modelo.

De esta manera, las especificaciones definidas para predecir cualquier serie  $\{x_t\}$  con las características previamente definidas son:

- Para la estimación libre de los parámetros:

$$x_t = \hat{\delta} + \hat{\phi}x_{t-1} + \hat{\phi}_e x_{t-12} - \hat{\phi}\hat{\phi}_e x_{t-13} + \epsilon_t$$

- Para la imposición de una raíz unitaria en el componente regular:

$$x_t = \hat{\delta} + x_{t-1} + \hat{\phi}_e x_{t-12} - \hat{\phi}_e x_{t-13} + \epsilon_t$$

- Para la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional:

$$x_t = \hat{\delta} + \hat{\phi}x_{t-1} + x_{t-12} - \hat{\phi}x_{t-13} + \epsilon_t$$

- Para la imposición de raíces unitarias en el componente regular y estacional:

$$x_t = \hat{\delta} + x_{t-1} + x_{t-12} - x_{t-13} + \epsilon_t$$

donde los parámetros libres son estimados por mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

## 4. Simulación de Monte Carlo y comparación de predicciones

El propósito de esta sección es representar un algoritmo que, para el proceso SARMA definido para el IMACEC en la ecuación 5, permita analizar y comparar la capacidad predictiva de las distintas imposiciones de raíces unitarias versus la estimación libre de los parámetros para distintos niveles de persistencia, tamaño de muestra y horizonte de predicción. De esta manera, se pretende conocer cómo se comportan las predicciones de estas especificaciones en un escenario en donde el modelo está correctamente especificado, pero la serie presenta altos niveles de persistencia. Cabe señalar que altos niveles de persistencia conllevan un desafío particular para la precisión predictiva, dada su cercanía a un modelo de paseo aleatorio (no estacionario) o explosivo.

El primer paso para la elaboración del algoritmo consiste en la generación del proceso estocástico sobre el cual se realizarán las predicciones. El segundo paso consiste en definir una estrategia que permita compararlas y, luego, definir las estructuras del proceso estocástico que son relevantes para el análisis.

### 4.1. Generación del proceso estocástico

Se requiere generar un proceso estocástico SARMA con la especificación definida en la ecuación 5. Para su elaboración, se generan 10,000 replicaciones de  $\epsilon_t \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$ .

Al respecto:

- $\sigma^2$  se fija de acuerdo a la estimación del proceso para el IMACEC contenida en la tabla 1.
- Se utiliza una distribución normal debido a que, de acuerdo a los test de normalidad de Pearson (1900) y Shapiro-Wilk (1965), los residuos de estimación del proceso para el IMACEC se ajustan a una distribución normal (para mayores detalles ver Anexo 1).
- Dado que estos procesos se generan de forma recursiva y los valores iniciales pueden influir en el largo plazo, para evitar su incidencia se define un parámetro  $\kappa$  como factor de inflación de

la muestra total. De tal manera que, definiendo que si se requieren  $T$  observaciones (dentro y fuera de muestra), entonces se simulan  $T\kappa$  observaciones y se trabaja con el último bloque de tamaño igual a  $T$ .

Luego, definiendo  $\delta$ ,  $\phi$  y  $\phi_e$  se genera:

$$\text{SARMA } (1,0)(1,0) : (1 - \phi L)(1 - \phi_e L^{12})x_{t+1} = \delta + \epsilon_{t+1} \quad (6)$$

donde  $\delta$  se fija de acuerdo a la estimación del proceso para el IMACEC contenida en la tabla 1.

## 4.2. Estrategia de comparación

Una vez simulado el proceso definido anteriormente, se realizan  $J = 500$  predicciones fuera de muestra para un conjunto de horizontes  $h$ , utilizando:

1. P1: la imposición de raíces unitarias, determinadas en la sección anterior;
2. P2: los parámetros estimados sin restringir; y
3. PV: los parámetros verdaderos de la serie simulada.

En donde cada predicción  $j$  está hecha sobre el mismo proceso estocástico, pero con una muestra generada por un factor estocástico distinto.

Posteriormente, se computa el error cuadrático medio (ECM) de las  $J$  predicciones de cada especificación y, luego, el criterio de comparación definirá como la mejor especificación de predicción aquella que arroje el menor ECM. Finalmente, para fines interpretativos se computa la cercanía porcentual de los ECM, de las distintas especificaciones, respecto al de las predicciones realizadas utilizando los parámetros verdaderos de la serie; a través de la razón:

$$\text{Razón ECM} = 100 \left( \frac{\text{ECM}_h^{PV}}{\text{ECM}_h^I} \right)$$

donde  $\text{ECM}_h^{PV}$  representa el ECM de las predicciones con un horizonte igual a  $h$ , realizadas utilizando los parámetros verdaderos de la serie y  $\text{ECM}_h^I$  representa el ECM de las predicciones con un horizonte igual a  $h$ , realizadas utilizando la especificación  $I$  (=P1 y P2).

### 4.3. Estructuras del proceso estocástico

Se utilizan:

- tres distintos valores para el tamaño de observaciones dentro de muestra (muestra de estimación):  $R=\{50, 100, 200\}$ ;
- seis distintos valores para el conjunto de horizontes de predicción:  $h = \{1, 3, 6, 12, 18, 24\}$ ;
- tres distintos niveles de persistencia regular y estacional:  $(\phi, \phi_e) \in \{0,9; 0,95; 0,99\}^2$ .

Respecto a los valores definidos para el tamaño de muestra y horizontes de predicción, estos son usados para mantener consistencia con la literatura. En cambio, la definición de los valores de persistencia se realiza en base a los resultados derivados de la estimación de la ecuación 5.

El proceso realizado en la simulación de Monte Carlo queda descrito de forma general a través del flujograma presentado en figura 4, ejecutado en Gauss (para mayores detalles ver Anexo 4).

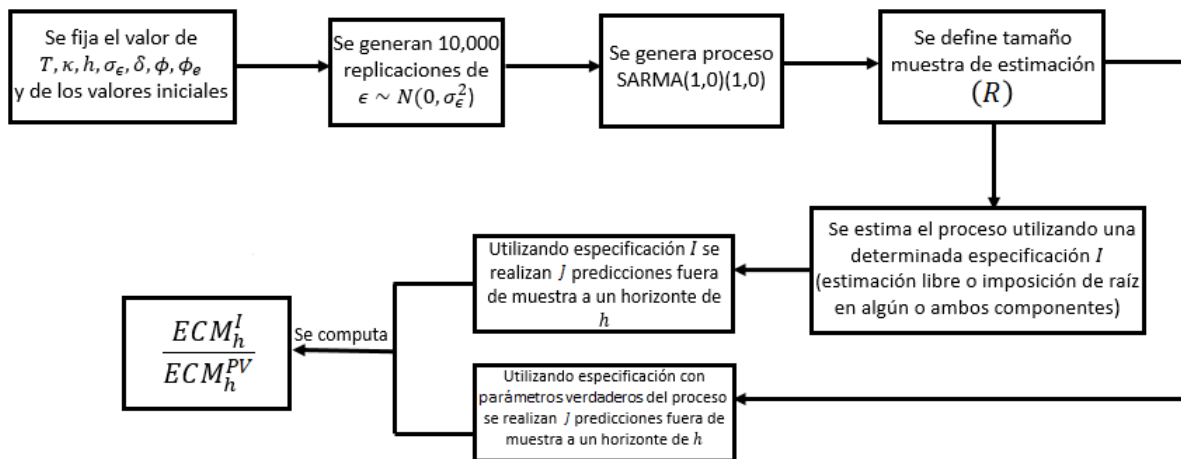


Figura 4: Flujograma simulación de Monte Carlo. Fuente: Elaboración propia

## 4.4. Resultados

Los resultados de la Razón ECM a través de los distintos tamaño de muestra, persistencia y distintas especificaciones se presentan en los cuadros 4-6, cuyo resumen se encuentra en el cuadro 3.

Horizonte de Predicción	R=50	R=100	R=200
Inmediatos	Cualquier imposición resulta más beneficiosa	Baja persistencia: no hay imposición recomendable. Para niveles intermedios, evidencia mixta. Para niveles máximos, cualquier imposición resulta beneficiosa.	RU en componente estacional es siempre perjudicial. RU en componente regular es recomendable con altos niveles de persistencia.
Intermedios	Baja persistencia: solo RU en componente estacional resulta más beneficiosa. A medida que la persistencia crece, la situación se va revirtiendo, siendo así recomendable RU en componente regular o en ambos.	La imposición de una RU en el componente estacional no entrega resultados satisfactorios. Sólo es recomendable imponer una RU en el componente regular cuando los niveles de persistencia son altos. Para bajos niveles de persistencia, ninguna imposición es recomendable	Imposición de una RU en componente estacional genera siempre resultados predictivos superiores al resto de las especificaciones.
Largo plazo	Resultados se mantienen cualitativamente respecto horizontes intermedios	Resultados se mantienen cualitativamente respecto horizontes intermedios	Resultados se mantienen cualitativamente respecto horizontes intermedios pero, a medida que también crece la persistencia, la calidad predictiva de las distintas imposiciones convergen.

Cuadro 3: Resumen de resultados Simulación de Monte Carlo. Fuente: Elaboración propia.

En un contexto de muestra pequeña (cuadro 4), en los horizontes más inmediatos se observa que virtualmente siempre la imposición de cualquier raíz resulta más beneficiosa que la estimación del modelo libre. Esto, sin duda, se debe a que la estimación del modelo SARMA con una muestra pequeña es de difícil identificación. En este contexto, es siempre conveniente la imposición de la raíz unitaria en el componente regular (para cualquiera de los niveles de persistencia analizados), y estacional especialmente con el mayor nivel de persistencia.

En horizontes intermedios, se observa que en un contexto con los niveles más bajos de persistencia (0.9;0.9), sólo la imposición de la raíz unitaria en el componente estacional genera proyecciones más precisas que el modelo libre. Sin embargo, en la medida que la persistencia de ambos componentes crece, este resultado se revierte y la imposición de la raíz unitaria en el componente estacional pierde validez. Por el contrario, la imposición de la raíz unitaria en el componente regular o mezclado con la restricción en el componente estacional, son las especificaciones que generan proyecciones más precisas que aquellas del modelo libre.

En el largo plazo, los resultados se mantienen cualitativamente iguales respecto a los horizontes intermedios. Es decir, la imposición de la raíz unitaria en el componente estacional genera re-



sultados superiores al caso de parámetros libres sólo en un contexto de baja persistencia, mientras que con alta persistencia es recomendable la imposición de la raíz unitaria en el componente regular.

Los resultados anteriores son importantes debido a que muchas series macroeconómicas están sujetas a alta persistencia y presentan un tamaño de muestra reducido. En esta categoría, califican distintas medidas de actividad como, por ejemplo, empleo, ventas del comercio, producción industrial, servicios de educación, entre otras. Asimismo, todas estas series están sujetas a revisiones y cambios metodológicos que llevan una nueva versión de la serie a presentar una muestra reducida. En estos casos es particularmente relevante el análisis de restricciones con fines predictivos.

En un contexto de muestra intermedia (cuadro 5), en los horizontes más inmediatos se observa que la imposición de cualquier raíz unitaria entrega resultados peores comparado con el modelo libre, cuando los niveles de persistencias son bajos, lo que sucede, por ejemplo, en series financieras. Sin embargo, cuando los niveles de persistencia alcanzan su valor máximo, la imposición de cualquiera de las raíces unitarias es beneficiosa. Con niveles intermedios de persistencia, la evidencia es mixta; por lo tanto, la imposición de raíces unitarias genera predicciones similares al caso en que los modelos son estimados libremente. En estos casos, se sugiere estudiar la posibilidad de modelar la serie con una estructura económica más rica.

En el mediano plazo, la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional no entrega resultados predictivos satisfactorios. Sin embargo, y de manera similar al caso de corto plazo, la imposición de una raíz unitaria en el componente regular entrega mejores resultados predictivos respecto al modelo libre, con altos niveles de persistencia. Con bajos niveles de persistencia, la imposición de una raíz unitaria en el componente regular resulta peor, debido a que, en este contexto y con mayor tamaño de muestra, la estimación del modelo con parámetros libres mejora sustancialmente.

En la medida que el horizonte aumenta, se replican cualitativamente los resultados encontrados para el mediano plazo, similar a lo encontrado en el contexto de muestra pequeña.

Al utilizar un tamaño de muestra adecuado para una estimación econométrica con una finalidad de predicción (cuadro 6), se observa que la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional en el plazo más inmediato es siempre perjudicial, a diferencia de la raíz en el componente regular, que con altos niveles de persistencia es altamente recomendable, siempre respecto al caso en que se estiman los parámetros del modelo libre. Un resultado interesante es que en la medida en que el horizonte de proyección crece, la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional genera

sistemáticamente predicciones superiores a las de cualquier otra restricción y obviamente a las del modelo libre.

En particular, se observa que en el largo plazo la restricción de la raíz unitaria en el componente estacional es sistemáticamente superior a cualquier otra restricción y las ganancias predictivas son de un tamaño considerable y que, sin embargo, en la medida que el horizonte y la persistencia crecen, la imposición de restricciones convergen en calidad predictiva. Este resultado es importante de destacar dado que, como sugieren Pincheira y Medel (2015), un modelo “mal” especificado puede generar proyecciones superiores a las de un modelo estimado libremente. Sin embargo, un resultado del presente trabajo es que, en un contexto de alta persistencia, la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional también puede generar proyecciones superiores a las de un modelo libre y similares a las del modelo especificado con una raíz unitaria en el componente regular. Este análisis es relevante para pronósticos de largo plazo para series con alta persistencia como, por ejemplo, la tasa de inflación y tasa natural de desempleo.

Un análisis de los resultados en la medida que el tamaño de muestra crece indica que el modelo que se beneficia mayormente es el modelo libre. Particularmente, el modelo libre presenta ganancias superiores al utilizar más datos en cuanto a la predicción en el horizonte más corto. Sin embargo, para los demás horizontes las ganancias predictivas asociadas a una mejor estimación del modelo también son fácilmente observables. Un resultado interesante es que las ganancias predictivas asociadas a un mayor tamaño de muestra son sustancialmente mayores en el modelo libre con los niveles de persistencia más altos y, consistentemente, para todos los horizontes. Otro resultado observado es que la combinación de baja persistencia regular y alta persistencia estacional resulta invariante al tamaño de la muestra.

	$\phi$	0.9	0.9	0.9	0.95	0.95	0.95	0.99	0.99	0.99
	$\phi_e$	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99
<b>Estimación libre</b>	h=1	90 %	91 %	86 %	90 %	90 %	86 %	89 %	89 %	87 %
	h=3	83 %	84 %	73 %	81 %	82 %	73 %	79 %	81 %	76 %
	h=6	77 %	79 %	61 %	73 %	76 %	62 %	70 %	73 %	68 %
	h=12	68 %	73 %	45 %	61 %	66 %	46 %	56 %	60 %	56 %
	h=18	57 %	62 %	33 %	50 %	56 %	36 %	46 %	50 %	47 %
	h=24	48 %	54 %	25 %	40 %	46 %	28 %	36 %	40 %	40 %
<b>RU Estacionalidad</b>	h=1	89 %	92 %	87 %	89 %	91 %	88 %	89 %	92 %	91 %
	h=3	83 %	86 %	71 %	82 %	85 %	71 %	82 %	85 %	77 %
	h=6	78 %	81 %	55 %	76 %	78 %	54 %	77 %	79 %	60 %
	h=12	71 %	75 %	37 %	67 %	70 %	33 %	69 %	71 %	39 %
	h=18	59 %	65 %	27 %	57 %	60 %	24 %	60 %	64 %	30 %
	h=24	54 %	59 %	19 %	49 %	53 %	16 %	53 %	56 %	21 %
<b>RU regular</b>	h=1	91 %	91 %	91 %	93 %	93 %	93 %	95 %	95 %	95 %
	h=3	79 %	79 %	79 %	85 %	85 %	85 %	91 %	91 %	90 %
	h=6	66 %	66 %	66 %	74 %	74 %	74 %	84 %	84 %	82 %
	h=12	49 %	49 %	49 %	58 %	58 %	58 %	73 %	73 %	70 %
	h=18	37 %	38 %	37 %	47 %	48 %	48 %	66 %	66 %	62 %
	h=24	29 %	29 %	29 %	38 %	38 %	38 %	58 %	58 %	54 %
<b>RU en ambos componentes</b>	h=1	88 %	90 %	92 %	90 %	92 %	94 %	92 %	95 %	96 %
	h=3	76 %	78 %	80 %	81 %	84 %	85 %	86 %	89 %	90 %
	h=6	62 %	64 %	66 %	69 %	72 %	74 %	79 %	82 %	82 %
	h=12	44 %	47 %	48 %	52 %	55 %	57 %	66 %	69 %	69 %
	h=18	32 %	35 %	37 %	41 %	44 %	47 %	57 %	61 %	61 %
	h=24	24 %	26 %	28 %	32 %	35 %	37 %	49 %	53 %	53 %

Cuadro 4: Acercamiento porcentual de calidad predictiva de la estimación libre de los parámetros e imposición de distintas raíces unitarias, respecto a las predicciones utilizando parámetros verdaderos del modelo. Resultados de Monte Carlo, R=50.

	$\phi$	0.9	0.9	0.9	0.95	0.95	0.95	0.99	0.99	0.99
	$\phi_e$	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99
<b>Estimación libre</b>	h=1	95 %	95 %	93 %	94 %	95 %	93 %	94 %	94 %	93 %
	h=3	90 %	91 %	85 %	88 %	89 %	84 %	86 %	86 %	85 %
	h=6	86 %	87 %	77 %	82 %	83 %	75 %	77 %	79 %	77 %
	h=12	80 %	83 %	66 %	72 %	75 %	62 %	65 %	68 %	67 %
	h=18	73 %	76 %	55 %	64 %	68 %	53 %	58 %	61 %	61 %
	h=24	68 %	72 %	47 %	58 %	62 %	45 %	50 %	54 %	55 %
<b>RU estacionalidad</b>	h=1	93 %	95 %	90 %	92 %	95 %	92 %	92 %	94 %	95 %
	h=3	89 %	92 %	74 %	88 %	90 %	80 %	87 %	90 %	86 %
	h=6	86 %	88 %	58 %	84 %	86 %	65 %	83 %	85 %	75 %
	h=12	81 %	85 %	37 %	78 %	81 %	45 %	77 %	79 %	58 %
	h=18	73 %	78 %	27 %	70 %	74 %	35 %	70 %	73 %	49 %
	h=24	69 %	74 %	19 %	65 %	70 %	26 %	66 %	69 %	39 %
<b>RU regular</b>	h=1	93 %	93 %	93 %	95 %	95 %	95 %	97 %	97 %	97 %
	h=3	83 %	83 %	83 %	89 %	89 %	89 %	94 %	94 %	92 %
	h=6	72 %	72 %	71 %	81 %	81 %	80 %	90 %	90 %	87 %
	h=12	57 %	57 %	56 %	68 %	67 %	67 %	82 %	82 %	76 %
	h=18	46 %	46 %	45 %	58 %	58 %	58 %	76 %	76 %	69 %
	h=24	38 %	38 %	37 %	50 %	49 %	49 %	70 %	70 %	62 %
<b>RU en ambos componentes</b>	h=1	89 %	91 %	93 %	91 %	94 %	96 %	93 %	96 %	97 %
	h=3	79 %	81 %	83 %	84 %	87 %	89 %	89 %	92 %	92 %
	h=6	67 %	69 %	71 %	75 %	78 %	80 %	84 %	87 %	85 %
	h=12	51 %	53 %	56 %	61 %	64 %	66 %	74 %	78 %	74 %
	h=18	39 %	42 %	45 %	50 %	54 %	57 %	66 %	71 %	67 %
	h=24	31 %	34 %	37 %	41 %	45 %	48 %	59 %	64 %	59 %

Cuadro 5: Acercamiento porcentual de calidad predictiva de la estimación libre de parámetros e imposición de distintas raíces unitarias, respecto a las predicciones utilizando parámetros verdaderos del modelo. Resultados de Monte Carlo, R=100.

	$\phi$	0.9	0.9	0.9	0.95	0.95	0.95	0.99	0.99	0.99
	$\phi_e$	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99
<b>Estimación libre</b>	h=1	95 %	95 %	93 %	94 %	95 %	93 %	93 %	94 %	93 %
	h=3	90 %	91 %	86 %	88 %	89 %	84 %	86 %	86 %	85 %
	h=6	86 %	87 %	78 %	82 %	83 %	75 %	78 %	79 %	77 %
	h=12	80 %	83 %	66 %	72 %	76 %	63 %	65 %	68 %	67 %
	h=18	72 %	76 %	56 %	65 %	69 %	54 %	58 %	61 %	61 %
	h=24	67 %	72 %	47 %	58 %	62 %	46 %	50 %	53 %	55 %
<b>RU estacionalidad</b>	h=1	92 %	95 %	97 %	92 %	95 %	96 %	92 %	94 %	95 %
	h=3	89 %	92 %	93 %	88 %	90 %	91 %	87 %	90 %	87 %
	h=6	85 %	88 %	89 %	84 %	86 %	86 %	83 %	85 %	79 %
	h=12	81 %	85 %	84 %	79 %	81 %	79 %	77 %	79 %	66 %
	h=18	72 %	78 %	77 %	71 %	75 %	73 %	70 %	74 %	59 %
	h=24	68 %	74 %	72 %	66 %	70 %	67 %	66 %	70 %	51 %
<b>RU regular</b>	h=1	93 %	93 %	93 %	95 %	95 %	96 %	97 %	97 %	97 %
	h=3	83 %	83 %	83 %	89 %	89 %	89 %	94 %	94 %	94 %
	h=6	72 %	72 %	72 %	81 %	81 %	80 %	90 %	90 %	89 %
	h=12	57 %	57 %	57 %	68 %	68 %	67 %	82 %	82 %	81 %
	h=18	45 %	46 %	46 %	58 %	59 %	58 %	76 %	76 %	76 %
	h=24	37 %	37 %	37 %	50 %	50 %	50 %	70 %	70 %	70 %
<b>RU en ambos componentes</b>	h=1	89 %	91 %	93 %	91 %	94 %	96 %	93 %	96 %	98 %
	h=3	79 %	81 %	83 %	84 %	87 %	89 %	89 %	92 %	94 %
	h=6	67 %	69 %	72 %	75 %	78 %	80 %	84 %	87 %	89 %
	h=12	51 %	54 %	56 %	61 %	64 %	66 %	75 %	78 %	80 %
	h=18	39 %	42 %	45 %	51 %	54 %	58 %	67 %	72 %	75 %
	h=24	30 %	34 %	36 %	41 %	45 %	49 %	60 %	65 %	68 %

Cuadro 6: Acercamiento porcentual de calidad predictiva de la estimación libre de los parámetros e imposición de distintas raíces unitarias, respecto a las predicciones utilizando parámetros verdaderos del modelo. Resultados de Monte Carlo, R=200.

## 5. Aplicación empírica: proyección del IMACEC

Mediante simulaciones de Monte Carlo se evaluó la capacidad predictiva de las distintas imposiciones de raíces unitarias bajo un escenario donde la incertidumbre era sólo paramétrica. En esta sección se pretende evaluar cómo se comportan si se agrega incertidumbre funcional.

Para ello, utilizando nuevamente la serie del IMACEC se pretende investigar si el comportamiento predictivo de las distintas imposiciones se condice con los resultados de la simulación; también, sugerir una determinada especificación para los distintos horizontes y compararla con los modelos de referencia utilizados para este tipo de series.

### 5.1. Prueba de Giacomini y White (2006)

Esta prueba se desarrolla para analizar si, para un determinado horizonte  $\tau$ , la capacidad predictiva fuera de muestra de una determinada especificación  $i$  es mejor, peor o igual que otra especificación  $j$ .

Para ello, se prueban las siguientes hipótesis:

$$\mathbb{H}_0^0 : \mathbb{E} [L_{i_\tau}(y) - L_{j_\tau}(y)] \geq 0$$

$$\mathbb{H}_1^0 : \mathbb{E} [L_{i_\tau}(y) - L_{j_\tau}(y)] < 0 \text{ (modelo } i \text{ superior a modelo } j)$$

$$\mathbb{H}_0^1 : \mathbb{E} [L_{i_\tau}(y) - L_{j_\tau}(y)] \leq 0$$

$$\mathbb{H}_1^1 : \mathbb{E} [L_{i_\tau}(y) - L_{j_\tau}(y)] > 0 \text{ (modelo } i \text{ inferior a modelo } j)$$

donde  $L_{i_\tau}(y)$  y  $L_{j_\tau}(y)$  corresponden al error de predicción para un horizonte  $\tau$  de las especificaciones  $i$  y  $j$ , respectivamente.

El estadístico de la prueba es:

$$t_\tau = \frac{1}{n_T} \frac{\sum_{t=m}^{T-\tau} \Delta L_{n_t}}{\frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n_T}}} \sim N(0, 1)$$

donde:

- $\Delta L_{n_t} = L_i(y)^{\tau, n_t} - L_j(y)^{\tau, n_t}$  corresponde a la diferencia del error de predicción entre las especificaciones  $i$  y  $j$  para un horizonte  $\tau$  utilizando una muestra de estimación  $n_t$ ,
- $n_T = T - \tau - m + 1$ , siendo  $T$  el tamaño total de observaciones y  $m$  la observación sobre la cual se comienzan a comparar las predicciones con respecto a los valores efectivos,

- si  $\tau = 1$ , el estimador de la varianza se obtiene a partir de la estimación de  $\hat{\sigma}_\alpha$  asociado al modelo de regresión simple  $\Delta L_n = \hat{\alpha} + \epsilon$  tal que  $\epsilon \sim RB(0, \sigma^2)$ . Para horizontes mayores a  $\tau = 1$  se utiliza estimador HAC de Newey y West (1987).

Adicionalmente, dado que las diferencias predictivas entre dos especificaciones no son monotónicas en su horizonte de predicción, entonces tampoco lo será la probabilidad de encontrar los resultados obtenidos bajo la hipótesis nula. Para la aplicación de esta prueba se dispone de  $T = 357$  observaciones y se considera un tamaño de muestra de estimación representativa y coherente con los valores utilizados en la simulación de  $n_T = 200$ .

### 5.1.1. Modelos a comparar

En concordancia con el proceso definido para el IMACEC, se analiza la precisión predictiva al imponer raíces unitarias en alguno o en ambos de sus componentes (regular y estacional). Para la comparación de estas especificaciones con los modelos de referencia, se utiliza el modelo AR(12), los modelos de suavizamiento exponencial simple y doble (S-ES y D-ES) y los modelos Holt-Winters con estacionalidad aditiva (HW-AS) y multiplicativa (HW-MS), en línea con los utilizados en Pincheira y Medel (2015). En el cuadro 7 se presenta la especificación analítica de estos modelos.

Modelo	Forma funcional
AR(12)	$x_t = \delta + \sum_{i=1}^{12} \phi_i x_{t-i}$
S-ES	$x_t = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{x}_{t-1}$
D-ES	$x_{t+h} = 2S_t - D_t + \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t - D_t)h$ $S_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)S_{t-1}$ $D_t = \beta S_t + (1 - \beta)D_{t-1}$ $\alpha = \beta = 1$
Holt-Winters con estacionalidad aditiva	$x_{t+h} = a_t + b_t h + c_{t+h-s}$ $a_t = \alpha(x_t - c_{t-s}) + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + 1 - \beta b_{t-1}$ $c_t = \gamma(x_t - a_{t+1}) - \gamma c_{t-s}$ $0 < \alpha, \beta, \lambda < 1$
Holt-Winters con estacionalidad multiplicativa	$x_{t+h} = a_t + b_t + c_{t+h-s}$ $a_t = \alpha \frac{x_t}{c_{t-s}} + (1 - \alpha)(c_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$ $c_t = \gamma \frac{x_t}{a_t} + (1 - \delta)c_{t-s}$ $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$

Cuadro 7: Modelos de referencia. Fuente: Elaboración propia.

### 5.1.2. Resultados

En el cuadro 8 se presentan los valores- $p$  de la prueba de Giacomini y White (2006) entre las predicciones de la estimación libre de los parámetros de la ecuación 5 y las realizadas a través de las distintas imposiciones de raíces unitarias, para las distintas hipótesis alternativas. Como es usual, valores menores están asociados al rechazo de la hipótesis nula en favor de la alternativa.

Los resultados de la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional indican que, a pesar de que para el horizonte más inmediato la evidencia no es concluyente sobre la superioridad del modelo restringido, a partir del horizonte  $h = 3$  la imposición de la raíz unitaria en dicho componente, produce resultados consistentemente superiores a los del modelo libre. Respecto a los resultados de la imposición de la raíz unitaria en el componente regular y en ambos componentes, la evidencia no es concluyente sobre la superioridad de estos modelos para horizontes de corto plazo. Sin embargo, para horizontes intermedios y de largo plazo, también entregan resultados superiores a los del modelo libre; en línea con las conclusiones obtenidas a través de la simulación de Monte Carlo.

	Hipótesis alternativa	h=1	h=3	h=6	h=12	h=18	h=24
RU estacional	Estimación libre superior	0.61	0.97	0.99	0.99	0.99	0.99
	Estimación libre inferior	0.39	0.03	0.01	0.01	0.01	0.01
RU regular	Estimación libre superior	0.32	0.87	0.77	0.99	0.99	0.99
	Estimación libre inferior	0.68	0.13	0.23	0.01	0.01	0.01
RU en ambos componentes	Estimación libre superior	0.14	0.58	0.93	0.99	0.99	0.99
	Estimación libre inferior	0.86	0.42	0.07	0.01	0.01	0.01

Cuadro 8: Valores- $p$  de la prueba Giacomini y White (2006) entre las predicciones de la estimación libre de los parámetros y las distintas imposiciones de raíces unitarias en sus componentes. Muestra de evaluación: 200 observaciones. Fuente: Elaboración propia.

Un análisis detallado de los horizontes de largo plazo se presenta en el cuadro 9. Los resultados indican que la imposición de una raíz unitaria en el componente regular resulta ser superior a cualquier otra especificación, y que se obtienen precisiones similares entre la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional y la imposición de una raíz unitaria en ambos componentes.

Estos resultados están fuertemente sujetos a la identificación de la estacionalidad de la serie de IMACEC por parte del modelo SARMA. En un contexto donde ambos componentes presentan alta persistencia, este desafío resulta especialmente relevante. Esto porque la alta persistencia de la serie debe ser identificada para uno de los dos componentes. Así, en una aplicación empírica como la



presentada, es siempre recomendable realizar el ejercicio imponiendo una raíz unitaria en un componente y luego en el otro. Esta recomendación es sugerida dado que la estimación con muestra finita del modelo SARMA estará sujeta, a su vez, a incertidumbre paramétrica, dificultando la identificación de los parámetros poblacionales.

	Hipótesis alternativa	h=12	h=18	h=24
RU estacional	Imposición RU en ambos componentes superior	0.43	0.78	0.28
	Imposición RU en ambos componentes inferior	0.58	0.21	0.72
RU regular	Imposición RU en ambos componentes superior	0.99	0.99	0.99
	Imposición RU en ambos componentes inferior	0.01	0.01	0.00

Cuadro 9: Valores- $p$  de la prueba de Giacomini y White (2006) entre las predicciones de la estimación imponiendo raíces en ambos componentes y la imposición de raíces unitarias en cada uno por separado. Muestra de evaluación: 200 observaciones. Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro 10 se presentan los resultados de la prueba de Giacomini y White (2006) para analizar las diferencias predictivas entre los modelos de referencia y las imposiciones que para determinados horizontes de predicción ofrecen los mejores resultados. Al respecto, la imposición adecuada de una raíz unitaria sobre el proceso SARMA entrega mejores resultados tanto de corto como de largo plazo con respecto al AR(12), S-ES, D-ES. Los modelos Holt-Winters tienen un comportamiento equivalente en el corto plazo y superior en el largo plazo.

Nótese que las especificaciones sobre las cuales se impusieron raíces unitarias constituyen la representación más parsimoniosa posible para analizar la capacidad predictiva de estas restricciones sobre un modelo SARMA. Así, un modelo SARMA con una dinámica más rica podría hacer un mayor ajuste a los datos y eventualmente revertir los resultados. La superioridad de los modelos Holt-Winters en este caso se puede explicar dado que pueden hacer una mejor modelación de la parte estacional.

	Hipótesis alternativa	h=1	h=3	h=6	h=12	h=18	h=24
RU estacional RU regular	AR(12) superior	0.99 -	0.99 -	0.99 -	- 0.99	- 0.99	- 0.99
RU estacional RU regular	AR(12) inferior	0.01 -	0.01 -	0.01 -	- 0.01	- 0.01	- 0.01
RU estacional RU regular	S-ES superior	0.99 -	0.99 -	0.01 -	- 0.99	- 0.99	- 0.99
RU estacional RU regular	S-ES inferior	0.01 -	0.01 -	0.99 -	- 0.01	- 0.01	- 0.01
RU estacional RU regular	D-ES superior	0.99 -	0.99 -	0.01 -	- 0.99	- 0.99	- 0.99
RU estacional RU regular	D-ES inferior	0.01 -	0.01 -	0.99 -	- 0.01	- 0.01	- 0.01
RU Estacional RU Regular	HW-AS superior	0.64 -	0.99 -	0.45 -	- 0.02	- 0.01	- 0.01
RU Estacional RU Regular	HW-AS inferior	0.35 -	0.01 -	0.52 -	- 0.98	- 0.99	- 0.99
RU Estacional RU Regular	HW-MS superior	0.20 -	0.64 -	0.40 -	- 0.01	- 0.01	- 0.01
RU Estacional RU Regular	HW-MS inferior	0.80 -	0.35 -	0.60 -	- 0.99	- 0.99	- 0.99

Cuadro 10: Valores- $p$  de la prueba de Giacomini y White (2006) entre las predicciones de la estimación imponiendo raíces con los mejores resultados predictivos según horizonte y las resultantes de los modelos de referencia. Muestra de evaluación: 200 observaciones. Fuente: Elaboración propia.

## 6. Conclusiones

La predicción de variables económicas es una actividad sobre la cual, dada su importancia, surgen continuamente investigaciones destinadas a mejorar la calidad de estas. Un área dentro de este tipo de investigaciones ha estado destinada al análisis de la utilidad predictiva de imponer raíces unitarias a variables relevantes que sean altamente persistentes, apelando a que bajo este contexto la incertidumbre paramétrica es mayor que la incertidumbre funcional (Ang et al., 2007; Pincheira y Medel, 2012, 2015; Pincheira y García, 2012; y Clements y Hendry, 1997). Sin embargo, el análisis ha tendido a variables económicas donde la alta persistencia se encuentra en un solo componente, ya sea en el regular o en el estacional.

En este trabajo, se investiga la utilidad predictiva de imponer raíces unitarias sobre una serie altamente persistente en sus dos componentes: regular y estacional. Para lo anterior, se realiza una

ilustración con el IMACEC, variable económica que mide mensualmente la actividad económica chilena y sobre la cual se basan importantes decisiones de política económica.

Caracterizando el IMACEC a través de un modelo SARMA se realiza una simulación de Monte Carlo calibrada, en donde, para distintos tamaños de muestra, se prueba y compara la calidad de las predicciones realizadas, imponiendo una raíz unitaria en alguno o en ambos componentes bajo un escenario de certidumbre funcional y altos niveles de persistencia.

Los resultados muestran que en un contexto de muestra pequeña y en los horizontes más inmediatos, la imposición de cualquier raíz unitaria resulta más beneficiosa que la predicción proveniente de un modelo libre. Adicionalmente, en un horizonte intermedio y con niveles bajos de persistencia, la imposición de una raíz unitaria entrega mejores predicciones que las de un modelo libre sólo al imponer una raíz estacional. En el largo plazo, los resultados son cualitativamente similares. Lo anterior resulta importante en este trabajo, dado que se postula que la incertidumbre paramétrica puede superar a la incertidumbre funcional, asociada a modelos de series de tiempo de alta persistencia estimados con muestra finita; y también, se complementan con los resultados de Pincheira y Medel (2015) sobre la imposición de una raíz en el componente regular.

Al utilizar una muestra intermedia, nuevamente la imposición de una raíz unitaria resulta beneficiosa con los máximos valores de persistencia, corroborando una vez más lo perjudicial de la incertidumbre paramétrica para la precisión predictiva.

En la medida que se agrega un mayor número de datos para la estimación del modelo libre, este necesariamente mejora su rendimiento predictivo. Sin embargo, para predecir al largo plazo con series de alta persistencia, aún es beneficiosa la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional.

Estos resultados son relevantes dado que gran parte de las series macroeconómicas presentan estacionalidad y alta persistencia (Beaulieu y Miron, 1993). Así, este trabajo sugiere que particularmente en el caso de muestra pequeña, una mala especificación puede sopesar los efectos nocivos de una forma funcional errónea. Este puede ser el caso, por ejemplo, del IMACEC. Una ilustración con esta serie refuerza los resultados encontrados mediante una simulación de Monte Carlo.

Nótese, sin embargo, que otras series de la economía chilena como, por ejemplo, los datos del mercado laboral que recientemente sufrieron un cambio metodológico importante, están sujetos a estacionalidad y a un problema de muestra pequeña. Por lo tanto, y dada las diversas decisiones

que se basan en estos indicadores, una aplicación de los resultados provistos en este trabajo sugiere considerar un modelo restringido en alguno de sus componentes, regular o estacional.<sup>2</sup>

Una aplicación empírica basada en el IMACEC sugiere que el resultado de las imposiciones con mejor capacidad predictiva es favorable respecto a un conjunto de modelos de referencia, lo cual puede extenderse a distintas series con dinámicas similares.

Una extensión natural de esta investigación consiste en la expansión de este tipo de análisis a otra familia de modelos de series de tiempo, para analizar si la imposición de una raíz unitaria en otro componente produce resultados predictivos superiores.

## Referencias

1. Ang, A., Bekaert, G., & Wei, M. (2007). Do macro variables, asset markets, or surveys forecast inflation better?. *Journal of Monetary Economics*, 54(4), 1163-1212.
2. Atkeson, A., & Ohanian, L. E. (2001). Are Phillips curves useful for forecasting inflation?. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 25(1), 2-11.
3. Beaulieu, J. J., & Miron, J. A. (1993). Seasonal unit roots in aggregate US data. *Journal of econometrics*, 55(1), 305-328.
4. Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1973). Some comments on a paper by Chatfield and Prothero and on a review by Kendall. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 337-352.
5. Alonso, J. & Semaán, J. (2010). Prueba de HEGY en R: Una guía. Gestión Editorial - Departamento de Economía Icesi.
6. Box, G.E.P. & Pierce, D.A. (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, 65(332), 1509-1526.
7. Clements, M. P., & Hendry, D. F. (1997). An empirical study of seasonal unit roots in forecasting. *International Journal of Forecasting*, 13(3), 341-355.

---

<sup>2</sup>Obsérvese de que a pesar que la mayoría de las series macroeconómicas de (incluso) países emergentes han acumulado varios años de registro, siempre están sujetos a cambios metodológicos o revisiones. Esto implica que el riesgo de modelación con muestra pequeña es siempre latente. Además, producto de diversas innovaciones tecnológicas, nuevas series son publicadas también compartiendo el problema de muestra pequeña.

8. Croushore, D. (2010). An evaluation of inflation forecasts from surveys using real-time data. *The BE Journal of Macroeconomics*, 10(1).
9. Franses P. (1991). Model selection and seasonality in time series. Tinbergen Institute Research Series. Thesis/Tinbergen Instituut, Amsterdam.
10. Giacomini, R., & White, H. (2006). Tests of conditional predictive ability. *Econometrica*, 74(6), 1545-1578.
11. Hylleberg, S., Engle, R. F., Granger, C. W., & Yoo, B. S. (1990). Seasonal integration and cointegration. *Journal of Econometrics*, 44(1), 215-238.
12. Kwiatkowski, D., Phillips, P., Schmidt, P. & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54: 159-178.
13. Pearson, K. (1900). On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling". *Philosophical Magazine Series 5*, 50 (302), 157-175.
14. Phillips, A. (1958). The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom 1861-1957. *Economica*, 25 (100), 283-299.
15. Pincheira, P., & García, A. (2012). En busca de un buen marco de referencia predictivo para la inflación en Chile. *El Trimestre Económico*, 79(313), 85-123.
16. Pincheira, P. (2012). Are Forecast Combinations Efficient?. Documento de trabajo 661, Banco Central de Chile.
17. Pincheira, P. M., & Medel, C. A. (2012). Forecasting Inflation with a Random Walk. Documento de trabajo 669, Banco Central de Chile.
18. Pincheira, P. M., & Medel, C. A. (2015). Forecasting Inflation with a Simple and Accurate Benchmark: The Case of the US and a Set of Inflation Targeting Countries. *Czech Journal of Economics and Finance*, 65(1), 2-29.
19. Nelson, C. R., & Plosser, C. R. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10(2), 139-162.
20. Newey, W., & West, K. (1987). A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3): 703-708.
21. Rudebusch, G. D. (1992). Trends and random walks in macroeconomic time series: a re-examination. *International Economic Review*, 33(3), 661-680.

22. Shapiro, S. & Wilk, M. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52 (3-4), 591-611.
23. Wold, H. (1938). A study in the analysis of stationary time series. Uppsala: Almqvist und Wiksell.

## Anexos

### Anexo 1: Diagnósticos de estimación

En la figura 5 se presenta el correlograma total y parcial de los residuos de la estimación de la ecuación 5, los que sugieren que esta representación es válida, exhibiendo un patrón de ruido blanco. Respaldando lo anterior, en el cuadro 11 se presentan los estadísticos de la prueba Portmanteau (Box y Pierce, 1970), donde no se rechaza la hipótesis de ruido blanco al 95 % de confianza.

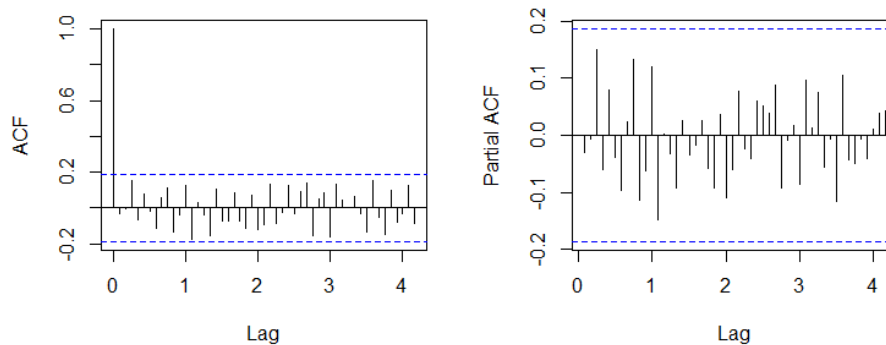


Figura 5: Correlograma total y parcial de residuos de estimación ecuación 5. Fuente: Elaboración propia.

Estadístico Q de Portmanteau	$\mathbb{P} > \chi^2$
20.09	0.99

Cuadro 11: Estadísticos de la prueba de Portmanteau (Box y Pierce, 1970). Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis de normalidad se utiliza el contraste  $\chi^2$  de Pearson (1900), en donde se agrupan los residuos en  $k$  clases como un histograma, definido de tal manera que estas clases sean equiprobables bajo la hipótesis de normalidad. Luego se calcula el índice de discrepancia de cada clase

$i$  entre las frecuencias observadas ( $O_i$ ) y las que son esperables ( $E_i$ ) de encontrar bajo la hipótesis de normalidad. De esta manera se construye el estadístico  $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ . Finalmente, el valor- $p$  se calcula a partir de una distribución  $\chi^2$  con  $k - 3$  grados de libertad. Los resultados se presentan en el cuadro 12, en donde no se rechaza la hipótesis de normalidad al 99 % de confianza.

Para reforzar lo anterior, se aplica la prueba de Shapiro-Wilk (1965) en el que se agrupan los residuos de menor a mayor valor. Se prueba la hipótesis nula de que la muestra ordenada  $\{\epsilon_i\}_{i=1}^N$  es normalmente distribuida. Luego, se define el estadístico  $W = \frac{(\sum_{i=1}^N \alpha_i \epsilon_i)^2}{\sum_{i=1}^N \epsilon_i - \bar{\epsilon}} \sim N(0, 1)$  donde las constantes  $\alpha$  son generadas a partir de una muestra de tamaño  $N$  normalmente distribuida. En particular:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = m'V^{-1}/(m'V^{-1}V^{-1}m)^{1/2}$$

donde  $m$  son los valores esperados del estadístico ordenado de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de una muestra normal. Los resultados se presentan en el cuadro 12 en donde no se rechaza la hipótesis de normalidad al 95 % de confianza.

<b>Estadístico <math>\chi^2</math> de Pearson</b>	Valor- $p$
16.904	0.461
<b>Estadístico W de Shapiro-Wilk</b>	Valor- $p$
0.992	0.080

Cuadro 12: Estadísticos test de normalidad para residuos. Fuente: Elaboración propia.

## Anexo 2: Prueba HEGY (1990)

A través de la prueba HEGY (Hylleberg et al. 1990) se pretende probar si  $(1 - L^{12}) \ln \text{IMACEC}_t$  es un proceso estacionario, lo que es equivalente a probar si  $\ln \text{IMACEC}_t = LD/(1 - L^{12})$  es un proceso no estacionario (LD corresponde a todos los términos que definen el proceso, por ejemplo, rezagos de la propia variable). Luego, dado que:

$$\begin{aligned}
(1 - L^{12}) &\equiv (1 - L)(1 + L)(1 - iL)(1 + iL) \\
&\times \left(1 + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}L\right) \left(1 + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}L\right) \\
&\times \left(1 - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}L\right) \left(1 - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}L\right) \\
&\times \left(1 + \frac{\sqrt{3} + i}{2}L\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3} - i}{2}L\right) \\
&\times \left(1 - \frac{\sqrt{3} + i}{2}L\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}L\right)
\end{aligned}$$

Entonces, si  $\ln \text{IMACEC}_t = LD/(1 - L^{12})$  no es un proceso estacionario es debido a que:

$$(1 - L) = 0 \quad (7)$$

$$(1 + L) = 0 \quad (8)$$

$$(1 - iL)(1 + iL) = 0 \quad (9)$$

$$\left(1 + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}L\right) \left(1 + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}L\right) = 0 \quad (10)$$

$$\left(1 - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}L\right) \left(1 - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}L\right) = 0 \quad (11)$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3} + i}{2}L\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3} - i}{2}L\right) = 0 \quad (12)$$

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3} + i}{2}L\right) \left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}L\right) = 0 \quad (13)$$

Luego, utilizando el procedimiento de Franses (1991) programado por Alonso y Semaán (2010) para el análisis de presencia de raíces unitarias para series estacionales mensuales, se estima para el logaritmo natural del IMACEC, el proceso definido en la ecuación 14:

$$\text{IMACEC}_{13,t} = \delta + \beta t + \sum_{j=1}^{12} \phi_j \text{IMACEC}_{j,t-1} + \sum_{i=1}^p \ln(\text{IMACEC})_{t-i} + \sum_{i=1}^{11} \alpha_i D_{i,t} + \epsilon_t \quad (14)$$



donde:

$$\begin{aligned}
\text{IMACEC}_{1,t-1} &= (1 + L + L^2 + L^3 + \dots + L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{2,t-1} &= -(1 - L + L^2 - L^3 + \dots - L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{3,t-1} &= -(L - L^3 + L^5 - L^7 + L^9 - L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{4,t-1} &= -(1 - L^2 + L^4 - L^6 + L^8 - L^{10})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{5,t-1} &= -\frac{1}{2}(1 + L - 2L^2 + L^3 + L^4 - 2L^5 + L^6 + L^7 - 2L^8 + L^9 + L^{10} - 2L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{6,t-1} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - L + L^3 - L^4 + L^6 - L^7 + L^9 - L^{10})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{7,t-1} &= \frac{1}{2}(1 - L - 2L^2 - L^3 + L^4 + 2L^5 + L^6 - L^7 - 2L^8 - L^9 + L^{10} + 2L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{8,t-1} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + L - L^3 - L^4 + L^6 + L^7 - L^9 - L^{10})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{9,t-1} &= -\frac{1}{2}(1 - L - 2L^2 - L^3 + L^4 + 2L^5 + L^6 - L^7 - 2L^8 - L^9 + L^{10} + 2L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{10,t-1} &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}L + 2L^2 - \sqrt{3}L^3 + L^4 - L^6 + \sqrt{3}L^7 - 2L^8 + \sqrt{3}L^9 - L^{10})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{11,t-1} &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + L - L^3 - \sqrt{3}L^4 - 2L^5 - \sqrt{3}L^6 - L^7 + L^9 - \sqrt{3}L^{10} + 2L^{11})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{12,t-1} &= -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}L + 2L^2 + \sqrt{3}L^3 + L^4 - L^6 - \sqrt{3}L^7 - 2L^8 - \sqrt{3}L^9 - L^{10})\text{IMACEC}_{t-1} \\
\text{IMACEC}_{13,t} &= (1 - L^{12})\text{IMACEC}_t
\end{aligned}$$

son variables creadas para probar las condiciones (7)-(13).  $\sum_{i=1}^p \text{IMACEC}_{t-i}$  se incluye para eliminar la posibilidad de estructura contenida en el error, siendo el orden  $p$  seleccionado de acuerdo al criterio de AIC y  $\sum_{i=1}^{11} \alpha_i D_i$ ,  $t$  captura el efecto de la estacionalidad determinística. Luego, se prueban las siguientes siete condiciones equivalentes a las condiciones (7)-(13):

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_0^0 &: \phi_1 = 0 \\
\mathbb{H}_0^1 &: \phi_2 = 0 \\
\mathbb{H}_0^2 &: \phi_3 = \phi_4 = 0 \\
\mathbb{H}_0^3 &: \phi_5 = \phi_6 = 0 \\
\mathbb{H}_0^4 &: \phi_7 = \phi_8 = 0 \\
\mathbb{H}_0^5 &: \phi_9 = \phi_{10} = 0 \\
\mathbb{H}_0^6 &: \phi_{11} = \phi_{12} = 0
\end{aligned}$$

donde  $\mathbb{H}_0^j$ , siguen distribuciones no convencionales (los resultados se presentan en el cuadro 2).

### Anexo 3: Prueba de KPSS (1992)

La prueba diseñada por Kwiatkowski et al. (1992) permite probar la hipótesis nula de que una serie  $\{x_t\}_{t=1}^T$  es estacionaria en torno a una de tendencia determinística en contra de la hipótesis alternativa de que es estacionaria en torno a una de tendencia estocástica. Para ello se estima el proceso definido en la ecuación 15.

$$x_t = \alpha + \beta_t + u_t + \sum_{k=1} \phi_k x_{t-k} + \epsilon_t \quad (15)$$

donde  $u_t = u_{t-1} + \eta_t$ ,  $k = 10\frac{\sqrt{T}}{14}$ ,  $\alpha$  y  $\beta_t$  son parámetros a estimar y  $\epsilon_t$  se asume ruido blanco. Luego se prueba:

$\mathbb{H}_0 : \sigma_\epsilon^2 = 0$  (estacionaria en torno a una tendencia determinística)

$\mathbb{H}_1 : \sigma_\epsilon^2 > 0$  (estacionaria en torno a una tendencia estocástica)

A través del estadístico KPSS definido en la ecuación 16 y que sigue una distribución browniana:

$$KPSS = \frac{1}{T^2} \frac{\sum_{t=1}^T \left( \sum_{s=1}^t \epsilon_t \right)^2}{\sigma_\infty^2} \sim \int_0^1 V_2(r) dr \quad (16)$$

donde  $\sigma_\infty^2$  es el estimador HAC de la varianza de  $\epsilon_t$ . Los resultados de su aplicación sobre la serie del logaritmo del IMACEC se presentan en el cuadro 13.

Estadístico KPSS	1.4515
Rezago de truncación ( $k$ )	4
Valor- $p$	0.010

Cuadro 13: Resultados de la prueba KPSS, serie logaritmo natural IMACEC. Fuente: Elaboración propia.

### Anexo 4: Códigos Gauss para simulación de Monte Carlo

#### Anexo 6.1: Código general

```
library pgraph;
graphset;
cls;
replicaciones =10000;
Obs=713; /*Número de observaciones dentro y fuera de muestra*/
R=      ;/*Tamaño muestra de estimación*/
```

```
RR=R+13;/*Se agregan "p" datos*/  
P=Obs-RR;/*=Obs-RR*/
```

```
/*Construcción de matrices*/
```

```
alfa=zeros(P,1);  
media=zeros(P,1);  
fi=zeros(P,1);  
fie=zeros(P,1);  
fixfie=zeros(P,1);  
forecast1=zeros(P,1);  
forecast2=zeros(P,1);  
forecast3=zeros(P,1);  
forecast4=zeros(P,1);  
forecast5=zeros(P,1);  
forecast6=zeros(P,1);  
forecast7=zeros(P,1);  
forecast8=zeros(P,1);  
forecast9=zeros(P,1);  
forecast10=zeros(P,1);  
forecast11=zeros(P,1);  
forecast12=zeros(P,1);  
forecast13=zeros(P,1);  
forecast14=zeros(P,1);  
forecast15=zeros(P,1);  
forecast16=zeros(P,1);  
forecast17=zeros(P,1);  
forecast18=zeros(P,1);  
forecast19=zeros(P,1);  
forecast20=zeros(P,1);  
forecast21=zeros(P,1);  
forecast22=zeros(P,1);  
forecast23=zeros(P,1);  
forecast24=zeros(P,1);  
errorf1=zeros(P,1);  
errorf3=zeros(P-2,1);  
errorf6=zeros(P-5,1);  
errorf9=zeros(P-8,1);  
errorf12=zeros(P-11,1);  
errorf18=zeros(P-17,1);
```

```

errorf24=zeros(P-23,1);
ECM1=zeros(replicaciones,1);
ECM3=zeros(replicaciones,1);
ECM6=zeros(replicaciones,1);
ECM9=zeros(replicaciones,1);
ECM12=zeros(replicaciones,1);
ECM18=zeros(replicaciones,1);
ECM24=zeros(replicaciones,1);

/* Generación del proceso*/
for kj(1,replicaciones,1);
kapa=5;          /*Numerario del bloque de números aleatorios*/
c=4;             /*Intercepto modelo verdadero*/
sigma=0.02;     /*Desviación estándar modelo verdadero*/
phi=    ;       /*Persistencia regular*/
phie=   ;       /*Persistencia estacionalidad*/
Y_aux=zeros(kapa*Obs,1);
Y=zeros(Obs,1);
u_aux=zeros(kapa*Obs,1)';
u_aux=sigma*rndn(kapa*Obs,1);
Y_aux[1]=3.58;  /*Primera observación*/
Y_aux[2]=3.51;  /*Segunda observación*/
Y_aux[3]=3.65;  /*Tercera observación*/
Y_aux[4]=3.66;  /*Cuarta observación*/
Y_aux[5]=3.64;  /*Quinta observación*/
Y_aux[6]=3.62;  /*Sexta observación*/
Y_aux[7]=3.6;   /*Septima observación*/
Y_aux[8]=3.58;  /*Octava observación*/
Y_aux[9]=3.57;  /*Novena observación*/
Y_aux[10]=3.69; /*Décima observación*/
Y_aux[11]=3.65; /*Décima primera observación*/
Y_aux[12]=3.67; /*Décima segunda observación*/
Y_aux[13]=3.66; /*Décima tercera observación*/

/*Generación observaciones y realización de predicciones/
for i(1,kapa*Obs-13,1);
Y_aux[i+13,1]= c+phi*Y_aux[i+12,1]+phie*Y_aux[i+1,1]-phi*phie*Y_aux[i,1]+u_aux[i+13,1];
endfor;

```

```
Y=Y_aux[(kapa-1)*(Obs)+1:kapa*Obs];
```

Esta parte del código varía según el tipo de especificación que se utilice para realizar las predicciones. Su contenido específico para cada una está contenido en los Anexos de más adelante.

```
/*Errores*/  
errorf1[k,1]=y[k+R+13]-forecast1[k,1];  
endfor;  
  
jj=1;  
do while (jj < P-1);  
errorf3[jj,1]=y[jj+R+15]-forecast3[jj,1];  
jj=jj+1;  
endo;  
  
jj=1;  
do while (jj < P-4);  
errorf6[jj,1]=y[jj+R+18]-forecast6[jj,1];  
jj=jj+1;  
endo;  
  
jj=1;  
do while (jj < P-7);  
errorf9[jj,1]=y[jj+R+21]-forecast9[jj,1];  
jj=jj+1;  
endo;  
  
jj=1;  
do while (jj < P-10);
```

```

errorf12[jj,1]=y[jj+R+24]-forecast12[jj,1];
jj=jj+1;
endo;

```

```

jj=1;
do while (jj < P-16);
errorf18[jj,1]=y[jj+R+30]-forecast18[jj,1];
jj=jj+1;
endo;

```

```

jj=1;
do while (jj < P-22);
errorf24[jj,1]=y[jj+R+36]-forecast24[jj,1];
jj=jj+1;
endo;

```

```

ECM1[kj,1]=meanc(errorf1^2);
ECM3[kj,1]=meanc(errorf3^2);
ECM6[kj,1]=meanc(errorf6^2);
ECM9[kj,1]=meanc(errorf9^2);
ECM12[kj,1]=meanc(errorf12^2);
ECM18[kj,1]=meanc(errorf18^2);
ECM24[kj,1]=meanc(errorf24^2);

```

```

endfor;

```

```

print meanc(ECM1)~meanc(ECM3)~meanc(ECM6);
print meanc(ECM12)~meanc(ECM18)~meanc(ECM24);

```

## Anexo 6.2: Código específico para predicciones utilizando parámetros verdaderos

```

for k(1,P,1);
forecast1[k,1]=c+phi*y[k+12+R]+phie*y[k+1+R]-phi*phie*y[k+R];
forecast2[k,1]=c+phi*forecast1[k,1]+phie*y[k+2+R]-phi*phie*y[k+1+R];
forecast3[k,1]=c+phi*forecast2[k,1]+phie*y[k+3+R]-phi*phie*y[k+2+R];
forecast4[k,1]=c+phi*forecast3[k,1]+phie*y[k+4+R]-phi*phie*y[k+3+R];
forecast5[k,1]=c+phi*forecast4[k,1]+phie*y[k+5+R]-phi*phie*y[k+4+R];
forecast6[k,1]=c+phi*forecast5[k,1]+phie*y[k+6+R]-phi*phie*y[k+5+R];
forecast7[k,1]=c+phi*forecast6[k,1]+phie*y[k+7+R]-phi*phie*y[k+6+R];

```

```

forecast8[k,1]=c+phi*forecast7[k,1]+phie*y[k+8+R]-phi*phie*y[k+7+R];
forecast9[k,1]=c+phi*forecast8[k,1]+phie*y[k+9+R]-phi*phie*y[k+8+R];
forecast10[k,1]=c+phi*forecast9[k,1]+phie*y[k+10+R]-phi*phie*y[k+9+R];
forecast11[k,1]=c+phi*forecast10[k,1]+phie*y[k+11+R]-phi*phie*y[k+10+R];
forecast12[k,1]=c+phi*forecast11[k,1]+phie*y[k+12+R]-phi*phie*y[k+11+R];
forecast13[k,1]=c+phi*forecast12[k,1]+phie*forecast1[k,1]-phi*phie*y[k+12+R];
forecast14[k,1]=c+phi*forecast13[k,1]+phie*forecast2[k,1]-phi*phie*forecast1[k,1];
forecast15[k,1]=c+phi*forecast14[k,1]+phie*forecast3[k,1]-phi*phie*forecast2[k,1];
forecast16[k,1]=c+phi*forecast15[k,1]+phie*forecast4[k,1]-phi*phie*forecast3[k,1];
forecast17[k,1]=c+phi*forecast16[k,1]+phie*forecast5[k,1]-phi*phie*forecast4[k,1];
forecast18[k,1]=c+phi*forecast17[k,1]+phie*forecast6[k,1]-phi*phie*forecast5[k,1];
forecast19[k,1]=c+phi*forecast18[k,1]+phie*forecast7[k,1]-phi*phie*forecast6[k,1];
forecast20[k,1]=c+phi*forecast19[k,1]+phie*forecast8[k,1]-phi*phie*forecast7[k,1];
forecast21[k,1]=c+phi*forecast20[k,1]+phie*forecast9[k,1]-phi*phie*forecast8[k,1];
forecast22[k,1]=c+phi*forecast21[k,1]+phie*forecast10[k,1]-phi*phie*forecast9[k,1];
forecast23[k,1]=c+phi*forecast22[k,1]+phie*forecast11[k,1]-phi*phie*forecast10[k,1];
forecast24[k,1]=c+phi*forecast23[k,1]+phie*forecast12[k,1]-phi*phie*forecast11[k,1];

```

### Anexo 6.3: Código específico para predicciones realizadas a través de la estimación libre

```

for k(1,P,1);
b=olsqr(y[k+13:k+12+R],ones(R,1)~y[k+12:k+11+R]~y[k+1:k+R]~(-y[k:k+R-1]));
alfa[k,1]=b[1];
fi[k,1]=b[2];
fie[k,1]=b[3];
fixfie[k,1]=b[4];

forecast1[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*y[k+12+R]+fie[k,1]*y[k+1+R]-fixfie[k,1]*y[k+R];
forecast2[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast1[k,1]+fie[k,1]*y[k+2+R]-fixfie[k,1]*y[k+1+R];
forecast3[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast2[k,1]+fie[k,1]*y[k+3+R]-fixfie[k,1]*y[k+2+R];
forecast4[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast3[k,1]+fie[k,1]*y[k+4+R]-fixfie[k,1]*y[k+3+R];
forecast5[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast4[k,1]+fie[k,1]*y[k+5+R]-fixfie[k,1]*y[k+4+R];
forecast6[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast5[k,1]+fie[k,1]*y[k+6+R]-fixfie[k,1]*y[k+5+R];
forecast7[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast6[k,1]+fie[k,1]*y[k+7+R]-fixfie[k,1]*y[k+6+R];
forecast8[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast7[k,1]+fie[k,1]*y[k+8+R]-fixfie[k,1]*y[k+7+R];
forecast9[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast8[k,1]+fie[k,1]*y[k+9+R]-fixfie[k,1]*y[k+8+R];
forecast10[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast9[k,1]+fie[k,1]*y[k+10+R]-fixfie[k,1]*y[k+9+R];
forecast11[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast10[k,1]+fie[k,1]*y[k+11+R]-fixfie[k,1]*y[k+10+R];
forecast12[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast11[k,1]+fie[k,1]*y[k+12+R]-fixfie[k,1]*y[k+11+R];

```

```

forecast13[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast12[k,1]+fie[k,1]*forecast1[k,1]-
fixfie[k,1]*y[k+12+R];
forecast14[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast13[k,1]+fie[k,1]*forecast2[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast1[k,1];
forecast15[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast14[k,1]+fie[k,1]*forecast3[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast2[k,1];
forecast16[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast15[k,1]+fie[k,1]*forecast4[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast3[k,1];
forecast17[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast16[k,1]+fie[k,1]*forecast5[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast4[k,1];
forecast18[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast17[k,1]+fie[k,1]*forecast6[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast5[k,1];
forecast19[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast18[k,1]+fie[k,1]*forecast7[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast6[k,1];
forecast20[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast19[k,1]+fie[k,1]*forecast8[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast7[k,1];
forecast21[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast20[k,1]+fie[k,1]*forecast9[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast8[k,1];
forecast22[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast21[k,1]+fie[k,1]*forecast10[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast9[k,1];
forecast23[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast22[k,1]+fie[k,1]*forecast11[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast10[k,1];
forecast24[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*forecast23[k,1]+fie[k,1]*forecast12[k,1]-
fixfie[k,1]*forecast11[k,1];

```

#### Anexo 6.4: Código específico para predicciones realizadas a través de la imposición de una raíz unitaria en el componente estacional

```

for k(1,P,1);
b=olsqr((y[k+13:k+12+R]-y[k+1:k+R]),ones(R,1)~(y[k+12:k+11+R]-y[k:k+R-1]));

alfa[k,1]=b[1];
fi[k,1]=b[2];

forecast1[k,1]=alfa[k,1]+fi[k,1]*y[k+12+R]+y[k+1+R]-fi[k,1]*y[k+R];
forecast2[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast1[k,1]+ y[k+2+R]-fi[k,1]*y[k+1+R];
forecast3[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast2[k,1]+y[k+3+R]-fi[k,1]*y[k+2+R];
forecast4[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast3[k,1]+y[k+4+R]-fi[k,1]*y[k+3+R];
forecast5[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast4[k,1]+y[k+5+R]-fi[k,1]*y[k+4+R];

```



```

forecast6[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast5[k,1]+y[k+6+R]-fi[k,1]*y[k+5+R];
forecast7[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast6[k,1]+y[k+7+R]-fi[k,1]*y[k+6+R];
forecast8[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast7[k,1]+y[k+8+R]-fi[k,1]*y[k+7+R];
forecast9[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast8[k,1]+y[k+9+R]-fi[k,1]*y[k+8+R];
forecast10[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast9[k,1]+y[k+10+R]-fi[k,1]*y[k+9+R];
forecast11[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast10[k,1]+y[k+11+R]-fi[k,1]*y[k+10+R];
forecast12[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast11[k,1]+y[k+12+R]-fi[k,1]*y[k+11+R];
forecast13[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast12[k,1]+forecast1[k,1]-fi[k,1]*y[k+12+R];
forecast14[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast13[k,1]+forecast2[k,1]-fi[k,1]*forecast1[k,1];
forecast15[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast14[k,1]+forecast3[k,1]-fi[k,1]*forecast2[k,1];
forecast16[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast15[k,1]+forecast4[k,1]-fi[k,1]*forecast3[k,1];
forecast17[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast16[k,1]+forecast5[k,1]-fi[k,1]*forecast4[k,1];
forecast18[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast17[k,1]+forecast6[k,1]-fi[k,1]*forecast5[k,1];
forecast19[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast18[k,1]+forecast7[k,1]-fi[k,1]*forecast6[k,1];
forecast20[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast19[k,1]+forecast8[k,1]-fi[k,1]*forecast7[k,1];
forecast21[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast20[k,1]+forecast9[k,1]-fi[k,1]*forecast8[k,1];
forecast22[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast21[k,1]+forecast10[k,1]-fi[k,1]*forecast9[k,1];
forecast23[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast22[k,1]+forecast11[k,1]-fi[k,1]*forecast10[k,1];
forecast24[k,1]=alfa[k,1]+ fi[k,1]*forecast23[k,1]+forecast12[k,1]-fi[k,1]*forecast11[k,1];

```

### Anexo 6.5: Código específico para predicciones realizadas a través de la imposición de una raíz unitaria en el componente regular

```

for k(1,P,1);
b=olsqr((y[k+13:k+12+R]-y[k+12:k+11+R]),ones(R,1)~(y[k+1:k+R]-y[k:k+R-1]));

alfa[k,1]=b[1];
fie[k,1]=b[2];

forecast1[k,1]=alfa[k,1]+y[k+12+R]+fie[k,1]*y[k+1+R]-fie[k,1]*y[k+R];
forecast2[k,1]=alfa[k,1]+forecast1[k,1]+fie[k,1]*y[k+2+R]-fie[k,1]*y[k+1+R];
forecast3[k,1]=alfa[k,1]+forecast2[k,1]+fie[k,1]*y[k+3+R]-fie[k,1]*y[k+2+R];
forecast4[k,1]=alfa[k,1]+forecast3[k,1]+fie[k,1]*y[k+4+R]-fie[k,1]*y[k+3+R];
forecast5[k,1]=alfa[k,1]+forecast4[k,1]+fie[k,1]*y[k+5+R]-fie[k,1]*y[k+4+R];
forecast6[k,1]=alfa[k,1]+forecast5[k,1]+fie[k,1]*y[k+6+R]-fie[k,1]*y[k+5+R];
forecast7[k,1]=alfa[k,1]+forecast6[k,1]+fie[k,1]*y[k+7+R]-fie[k,1]*y[k+6+R];
forecast8[k,1]=alfa[k,1]+forecast7[k,1]+fie[k,1]*y[k+8+R]-fie[k,1]*y[k+7+R];
forecast9[k,1]=alfa[k,1]+forecast8[k,1]+fie[k,1]*y[k+9+R]-fie[k,1]*y[k+8+R];
forecast10[k,1]=alfa[k,1]+forecast9[k,1]+fie[k,1]*y[k+10+R]-fie[k,1]*y[k+9+R];

```

```

forecast11[k,1]=alfa[k,1]+forecast10[k,1]+fie[k,1]*y[k+11+R]-fie[k,1]*y[k+10+R];
forecast12[k,1]=alfa[k,1]+forecast11[k,1]+fie[k,1]*y[k+12+R]-fie[k,1]*y[k+11+R];
forecast13[k,1]=alfa[k,1]+forecast12[k,1]+fie[k,1]*forecast1[k,1]-fie[k,1]*y[k+12+R];
forecast14[k,1]=alfa[k,1]+forecast13[k,1]+fie[k,1]*forecast2[k,1]-fie[k,1]*forecast1[k,1];
forecast15[k,1]=alfa[k,1]+forecast14[k,1]+fie[k,1]*forecast3[k,1]-fie[k,1]*forecast2[k,1];
forecast16[k,1]=alfa[k,1]+forecast15[k,1]+fie[k,1]*forecast4[k,1]-fie[k,1]*forecast3[k,1];
forecast17[k,1]=alfa[k,1]+forecast16[k,1]+fie[k,1]*forecast5[k,1]-fie[k,1]*forecast4[k,1];
forecast18[k,1]=alfa[k,1]+forecast17[k,1]+fie[k,1]*forecast6[k,1]-fie[k,1]*forecast5[k,1];
forecast19[k,1]=alfa[k,1]+forecast18[k,1]+fie[k,1]*forecast7[k,1]-fie[k,1]*forecast6[k,1];
forecast20[k,1]=alfa[k,1]+forecast19[k,1]+fie[k,1]*forecast8[k,1]-fie[k,1]*forecast7[k,1];
forecast21[k,1]=alfa[k,1]+forecast20[k,1]+fie[k,1]*forecast9[k,1]-fie[k,1]*forecast8[k,1];
forecast22[k,1]=alfa[k,1]+forecast21[k,1]+fie[k,1]*forecast10[k,1]-fie[k,1]*forecast9[k,1];
forecast23[k,1]=alfa[k,1]+forecast22[k,1]+fie[k,1]*forecast11[k,1]-fie[k,1]*forecast10[k,1];
forecast24[k,1]=alfa[k,1]+forecast23[k,1]+fie[k,1]*forecast12[k,1]-fie[k,1]*forecast11[k,1];

```

### Anexo 6.6: Código específico para predicciones realizadas a través de la imposición de una raíz unitaria en ambos componentes

```

for k(1,P,1);
b=olsqr((y[k+13:k+12+R]-y[k+1:k+R])-(y[k+12:k+11+R]-y[k:k+R-1]),ones(R,1));

alfa[k,1]=b[1];

forecast1[k,1]=alfa[k,1]+y[k+12+R]+y[k+1+R]-y[k+R];
forecast2[k,1]=alfa[k,1]+ forecast1[k,1]+ y[k+2+R]-y[k+1+R];
forecast3[k,1]=alfa[k,1]+ forecast2[k,1]+y[k+3+R]-y[k+2+R];
forecast4[k,1]=alfa[k,1]+ forecast3[k,1]+y[k+4+R]-y[k+3+R];
forecast5[k,1]=alfa[k,1]+ forecast4[k,1]+y[k+5+R]-y[k+4+R];
forecast6[k,1]=alfa[k,1]+ forecast5[k,1]+y[k+6+R]-y[k+5+R];
forecast7[k,1]=alfa[k,1]+ forecast6[k,1]+y[k+7+R]-y[k+6+R];
forecast8[k,1]=alfa[k,1]+ forecast7[k,1]+y[k+8+R]-y[k+7+R];
forecast9[k,1]=alfa[k,1]+ forecast8[k,1]+y[k+9+R]-y[k+8+R];
forecast10[k,1]=alfa[k,1]+ forecast9[k,1]+y[k+10+R]-y[k+9+R];
forecast11[k,1]=alfa[k,1]+ forecast10[k,1]+y[k+11+R]-y[k+10+R];
forecast12[k,1]=alfa[k,1]+ forecast11[k,1]+y[k+12+R]-y[k+11+R];
forecast13[k,1]=alfa[k,1]+ forecast12[k,1]+forecast1[k,1]-y[k+12+R];
forecast14[k,1]=alfa[k,1]+ forecast13[k,1]+forecast2[k,1]-forecast1[k,1];
forecast15[k,1]=alfa[k,1]+ forecast14[k,1]+forecast3[k,1]-forecast2[k,1];
forecast16[k,1]=alfa[k,1]+ forecast15[k,1]+forecast4[k,1]-forecast3[k,1];

```

```
forecast17[k,1]=alfa[k,1]+ forecast16[k,1]+forecast5[k,1]-forecast4[k,1];
forecast18[k,1]=alfa[k,1]+ forecast17[k,1]+forecast6[k,1]-forecast5[k,1];
forecast19[k,1]=alfa[k,1]+ forecast18[k,1]+forecast7[k,1]-forecast6[k,1];
forecast20[k,1]=alfa[k,1]+ forecast19[k,1]+forecast8[k,1]-forecast7[k,1];
forecast21[k,1]=alfa[k,1]+ forecast20[k,1]+forecast9[k,1]-forecast8[k,1];
forecast22[k,1]=alfa[k,1]+ forecast21[k,1]+forecast10[k,1]-forecast9[k,1];
forecast23[k,1]=alfa[k,1]+ forecast22[k,1]+forecast11[k,1]-forecast10[k,1];
forecast24[k,1]=alfa[k,1]+ forecast23[k,1]+forecast12[k,1]-forecast11[k,1];
```